

令和 2 年 7 月 9 日現在

機関番号：13102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K00008

研究課題名(和文) 離散および連続通信路の通信路容量を達成する分布に関する研究

研究課題名(英文) Study on the distribution that achieves the channel capacity of discrete and continuous channels

研究代表者

中川 健治 (Nakagawa, Kenji)

長岡技術科学大学・工学研究科・教授

研究者番号：80242452

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：(1) Arimoto-Blahutアルゴリズムの収束速度が遅くなる場合の収束速度を評価した。通信路容量を達成する入力分布 λ が確率分布全体の集合 Λ の境界上にあるときは問題がかなり難しい。Arimoto-Blahutアルゴリズムの定義関数FのTaylor展開を2次項までで打ち切って得られる漸化式を解析し1/Nオーダーの遅い収束について、具体的な通信路行列について評価した。(2) 通信路が連続値の場合に、通信路容量を達成する入力分布が離散分布になる理由を明らかにすることに取り組んだが、(1)を先に取り組んでいたが、予想に反して(1)に手間が掛かり(2)を進展させることができなかった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

学術的な意義について述べる。本研究における解析の困難さは、得られた非線形力学系が多変数の連立漸化式であることである。このような問題を扱っている論文や教科書は、調べた限り全くなかった。1つの連続変数tを変数とする連立微分方程式の理論を扱っている教科書はあるが、ほとんど参考にならなかった。そこで、自力で考えるしかなかったのだが、最終的な解決に至っていない。この非線形力学系は人工的に作られた例題ではなく、Arimoto-Blahutアルゴリズムというとても自然なアルゴリズムから得られているので、十分に考察する意義がある。さらに、様々な分野における問題の解析のための基礎になるのではないかと考えている。

研究成果の概要(英文)：(1) The convergence speed of the Arimoto-Blahut algorithm is evaluated when the convergence speed is slow. The problem is rather difficult when the input distribution λ is on the boundary of the set of all probability distributions Λ .

研究分野：情報通信ネットワーク

キーワード：通信路容量 Kullback-Leibler情報量 Arimotoアルゴリズム 収束速度

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 離散的無記憶通信路の通信路容量を達成する入出力分布を計算するアルゴリズムの開発
通信路行列 \mathbf{Q} を持つ離散的無記憶通信路を考える。 \mathbf{P} を入力分布とし、 \mathbf{Q} を出力分布とする。
このとき、相互情報量 $I(\mathbf{P}; \mathbf{Q})$ の最大値として通信路容量 C が定義される。

Arimoto アルゴリズムとの関係

通信路容量 C を数値的に計算するアルゴリズムとして Arimoto アルゴリズムが知られていてよく利用されている。これは適当な入力分布を初期分布として、逐次的な計算によって通信路容量を達成する分布に収束させるアルゴリズムである。しかし、Arimoto アルゴリズムは C を解析的に、すなわち式によって表すものではないので、通信路行列 \mathbf{Q} と C の関係がよく理解できない。例えば、 \mathbf{Q} が少し変化して \mathbf{Q}' になったとき、Arimoto アルゴリズムでは \mathbf{Q}' について初めから計算をやり直す。その結果、 \mathbf{Q}' の通信路容量 C' が得られるが、 C と C' の違いが C と C' の違いにどう反映するのか不明である。

Muroga の計算法との関係

一方、Muroga は C の直接計算法を与えている。Muroga の計算法では最適解が解析的に得られるので、 \mathbf{Q} の構造と C を達成する分布との関係、特に幾何学的関係がよくわかり、さらに、通信路容量に関する様々な問題を研究する基礎的なフレームワークを与える。しかし、Muroga の計算法は組み合わせ的な方法であり、解析的な解が得られるが、計算量が大きい。

(2) 連続値加法的雑音通信路の通信路容量を達成する入出力分布を計算するアルゴリズムの開発

通信路の入力 X および出力 Y が連続値をとるときの通信路容量について考察する。わずかな例外を除いて、通信路容量 C を達成する入力分布は離散分布であることが知られている。通信路容量 C は X 上のすべての確率分布に関して相互情報量を最大化して得られるので、 C を達成するのは連続分布であると思われるのに、離散分布が最適となるのは不思議である。(参照：池田思朗, "通信路容量と確率測度の最適化," IEICE Fundamental Reviews, Vol.5, No.3, pp.230-238, 2012) この理由を解明したい。

2. 研究の目的

(1) 本研究では、通信路容量を計算する組み合わせ的でないアルゴリズムを、情報幾何学に基づいて開発することを目的とする。通信路容量の問題はユークリッド幾何における最小包含円の問題と類似していえる。我々にとってなじみのあるユークリッド幾何によって解法アルゴリズムを開発すれば、それは直接、通信路容量を計算するアルゴリズムに翻訳できる。

(2) 連続値加法的雑音通信路の通信路容量を達成する入出力分布を計算するアルゴリズムの開発

本研究では、入力 X と出力 Y がともに連続値であるときに、なぜ離散分布が C を達成するのか、その理由を明らかにする。特に X が実数上の有限区間で雑音 Z が有限区間上の加法的雑音の場合について検討する。多くの文献では、離散分布が通信路容量を達成することを証明するのに、一変数複素関数論において、正則関数の零点が孤立することを使っている。しかし、多次元への拡張を考えるとこれでは不十分であるし、そもそも、確率測度の範疇では可測性や(半)連続性を考えているときに、複素解析関数という非常に制約された構造を利用するというのは問題を限定しすぎである。本研究では、入力 X 上の確率分布の特性関数、すなわちフーリエ変換に基づいて、最適な入力分布の離散性について明らかにする。

3. 研究の方法

(1) 離散的無記憶通信路の通信路容量を達成する入出力分布を計算するアルゴリズムの開発
現在検討しているアルゴリズムが確かに正しく最小包含円を求められることを証明し、従来の計算アルゴリズムとの計算量を比較する。具体的には、各通信路行ベクトルから KL 情報量が等しい分布 Q^0 または R^n の各点から等距離にある点 Q^0 をアファイン部分空間への射影を繰り返し適用して、通信路容量問題あるいは最小包含円問題の最適点を求めるアルゴリズムを開発する。通信路容量の問題は出力分布に関する最適化問題であり、考える空間はユークリッド空間ではなく確率分布全体がなす集合である。その集合上の幾何学は情報幾何である。ユークリッド幾何と情報幾何は Amari の 幾何の立場から統一的に考えることができる。その際に重要なことは、最小包含円問題を考察するのにユークリッド幾何のどんな性質を使ってもよいということではなく、通信路容量問題に適用可能な性質だけを使う必要がある、ということである。それが実現できれば、最小包含円問題で得られたアルゴリズムをほぼ自動的に通信路容量問題に移植することができる。本研究では、実際に両方の幾何に共通の性質として、距離、重心座標、内積、ピタゴラスの定理、アファイン部分空間への射影のみを使ってアルゴリズムを開発する。

(2) 連続値加法的雑音通信路の通信路容量を達成する入出力分布を計算するアルゴリズムの開発

入出力分布 X, Y および加法的雑音 Z の特性関数、すなわちフーリエ変換に基づいて、通信路容量を達成する入力分布が離散分布であること理由を明らかにする。まず、 Z の範囲が有限区間の場合に、任意の雑音分布に対して、 C を達成する入力 X 上の分布が離散分布であることを証明し、その分布を計算するアルゴリズムを得る。さらに有限区間という条件をはずして、 $-\infty < Z < \infty$

上の任意の雑音分布に対して同様の結果を得る。

4. 研究成果

[1] 論文題目: Arimoto アルゴリズムの境界における収束速度について

著者: 中川健治, 武井由智

学会名: 2017 情報理論とその応用シンポジウム (SITA2017) ポスター発表

開催日: 2017 年 11 月 30 日

概要: 通信路行列の行ベクトルの配置に基づいて Arimoto アルゴリズムの収束速度について調べた。特に、通信路容量 C を達成する入力分布 p^* が確率集合の境界にあるときを詳細に調べた。Kuhn-Tucker 条件に基づいて、入力アルファベットのインデックスを 3 つのタイプに分類して、タイプ 2 のインデックスが存在するときに Arimoto アルゴリズムの収束が遅くなることを数値的に確認した。最も簡単な $m=3$ の場合においても収束が遅いときの収束速度の理論値を得られていない。

[2] 論文題目: 通信路容量を達成する出力分布の射影アルゴリズムによる探索について

著者: 中川健治, 渡部康平, 佐武拓斗

学会名: 電気通信大学土曜セミナー

開催日: 2018 年 3 月 16 日

概要: 離散的無記憶通信路の通信路容量を計算する代表的な 2 つの方法として、Muroga による直接計算法と Arimoto による逐次計算法がある。本研究では、Muroga の直接計算法について、ダイバージェンス幾何とユークリッド幾何の類似性に注目して新しい計算アルゴリズムを得る。ユークリッド空間における最小包含円問題を幾何的に考察し、ユークリッド距離に関する $\min\text{-max}$ 問題の解を計算するアルゴリズムを開発する。そして得られたアルゴリズムを通信路容量に関する $\min\text{-max}$ 問題に適用して、通信路容量を達成する出力分布を計算するアルゴリズムを作る。このようなアプローチをとる理由は、ユークリッド幾何は我々にとってなじみがある幾何なので、新しい幾何的なアルゴリズムを作りやすいからである。

[3] 論文題目: Arimoto アルゴリズムの収束速度について

著者: 中川健治, 武井由智

学会名: 電気通信大学土曜セミナー

開催日: 2018 年 3 月 16 日

概要: Arimoto による逐次計算法について、通信路行列の行ベクトルの幾何的配置に基づいて Arimoto アルゴリズムの収束速度を明らかにする。Arimoto アルゴリズムの定義関数の Taylor 展開における 1 次項によって指数的収束を考察し、1 次項及び 2 次項によって $1/N$ オーダーの収束を考察する。数値的な比較により、実際の収束速度が理論的に得られた収束速度と一致することを確認する。

[4] 論文題目: Analysis for the Slow Convergence in Arimoto Algorithm

著者: Kenji Nakagawa, Yoshinori Takei, Kohei Watabe

学会名: 2018 International Symposium on Information Theory and Its Applications (ISITA2018)

開催日: 2018 年 10 月 31 日

概要: In this paper, we investigate the convergence speed of the Arimoto algorithm. By analyzing the Taylor expansion of the defining function of the Arimoto algorithm, we will clarify the conditions for the exponential or $1/N$ order convergence and calculate the convergence speed. We show that the convergence speed of the $1/N$ order is evaluated by the derivatives of the Kullback-Leibler divergence with respect to the input probabilities. The analysis for the convergence of the $1/N$ order is new in this paper. Based on the analysis, we will compare the convergence speed of the Arimoto algorithm with the theoretical values obtained in our theorems.

[5] 論文題目: Arimoto アルゴリズムにおける遅い収束についての解析

著者: 中川健治, 武井由智, 渡部康平

学会名: 2018 情報理論とその応用シンポジウム (SITA2018)

開催日: 2018 年 12 月 19 日

概要: Arimoto アルゴリズムは通信路容量 C を計算するための逐次アルゴリズムである。本論文では、通信路容量を達成する入力分布のすべての成分が正となる場合以外にも指数的に収束する場合があることを示し、指数的収束となるための十分条件を与える。さらに具体的に減少指数を計算する。減少指数は KL 情報量とその i に関する微分で上から評価される。さらに、従来の研究では扱われていない $1/N$ オーダーの収束についても考察する。特に、入力アルファベットサイズが $m=3$ の場合に $1/N$ オーダーで収束するための十分条件を与え、収束速度が KL 情報量とその i に関する微分で表されることを示す。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Kenji Nakagawa, Yoshinori Takei, Kohei Watabe
2. 発表標題 Analysis for the Slow Convergence in Arimoto Algorithm
3. 学会等名 International Symposium on Information Theory and its Applications (ISITA2018) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 中川健治, 武井由智
2. 発表標題 Arimotoアルゴリズムの境界における収束速度について
3. 学会等名 電子情報通信学会 第40回情報理論とその応用シンポジウム
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 中川健治, 武井由智, 渡部康平
2. 発表標題 Arimotoアルゴリズムにおける遅い収束についての解析
3. 学会等名 2018情報理論とその応用シンポジウム (SITA2018)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

特になし

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	渡部 康平 (Watabe Kohei) (10734733)	長岡技術科学大学・工学研究科・助教 (13102)	
研究分担者	武井 由智 (Takei Yoshinori) (90313337)	秋田工業高等専門学校・その他部局等・教授 (51401)	