

令和 3 年 6 月 3 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K00974

研究課題名(和文) 算数と数学を一貫させる教師の指導知と単元構成の理論の実践的開発研究

研究課題名(英文) The practical study for the theory of mathematical knowledge for teaching and for developing a teaching unit in terms of the consistency between elementary and secondary mathematics

研究代表者

岡崎 正和 (Okazaki, Masakazu)

岡山大学・大学院教育学研究科・教授

研究者番号：40303193

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は、算数と数学の接続を図り、単元を一貫して展開できる指導のための理論と実践を明らかにすることを目的とした。理論的には、算数・数学授業の文化性と物語的思考に着目し、授業分析の枠組みを構成した。実践的には、わり算、文字式の証明、立体図形、図形の証明に関するデザイン実験を実施し、物語的思考と記号解釈過程を中心に質的分析を行い、算数と数学の接続に関する理論的・実践的知見の抽出と概念化を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

研究成果の学術的意義として、理論的には、算数と数学の接続を促す授業構成と授業分析のために、物語的思考と記号解釈過程の視点を位置づけたことである。実践的には、算数から数学への一貫した学習を作り出す単元・カリキュラム開発を複数の内容に関して行ったこと、また実践の分析の中から理論的視点を抽出したことで、理論と実践との結びつきが確かなものとなり、教師の指導知を明らかにすることに貢献していることがあげられる。

研究成果の概要(英文)：The study aimed at clarifying theory and practice for mathematics teaching which enables students to overcome the gaps between elementary and secondary mathematics and which can coherently develop the students' learning through a teaching unit. As a theoretical perspective, I discussed the narrative thinking of mathematics classroom and its culture as the analytical framework of the study. Practically, I conducted the design experiments on division, proof by literal expression, solid figure, and geometric proof and analyzed them particularly in terms of the narrative thinking and the semiotic interpretation. Finally, I tried to conceptualize the theoretical viewpoints as well as clarifying mathematical knowledge for teaching for the bridging between elementary and secondary mathematics.

研究分野：数学教育学

キーワード：科学教育 算数と数学の接続 物語的思考 単元構成 数学的指導知 証明

## 1. 研究開始当初の背景

研究開始時の背景として、算数・数学における小中学校の一貫性の問題と、教師の指導知の継承および発展の問題があり、現在も続く課題である。小学校と中学校の連携・一貫教育は、学力向上や少子化の問題と関連し、また義務教育学校の創設に伴い、小中学校の9年間で子どもの発達段階に応じた学びをいかに実現するかは学校教育において重要な研究課題になっている。算数・数学科でも小学校と中学校の接続は伝統的な課題であり、その研究の必要性は益々高まっている。もう一つの関心は、教師の大量退職と若手教員の増加を巡る、指導知の継承の問題と、新教育課程に対応する実践開発力の問題である。有能な教師の指導技術を継承しつつ、新しい教育課程に対応する為の実践知を明らかにしていくことは、我が国の学習指導の水準を維持・向上する上で重要な課題と考える。

本研究では、これまでに小中の接続期において生徒が困難性を示す教材として、小数除法、図形の包摂関係、図形の移動と作図、比例と一次関数を対象として、小中学校の教師と協働による授業開発研究を行い、その質的分析研究を通して、算数を数学に接続する為の理論的・実践的知見を得てきた。特に、算数と数学の乖離が生じる原因として、算数・数学学習で子どもたちが細分化された知識を形式的に学んだ結果、知識が次の学習に活用されにくい状況が起こっていることに鑑みて、本研究ではこれまで、単元を総合的に展開できる学習環境の中で、子ども達が活動を通して知識を身に付け、その知識を活用する中で中学数学との確かなつながりを確保するという全体論の視点が重要と考え、その視点から理論的・実践的知見を得てきた。また、教師の知識に関する研究に関して、「数学的な指導知」の研究の世界的動向を把握し、さらに日本の算数・数学授業の質を吟味できる理論の創出を目指して、「授業の物語的一貫性」を視点とした理論的枠組みの開発に着手した。

以上の点を踏まえて、本研究は算数と数学の一貫性の視点に立ち、教師と協働による授業づくりの取り組みから、単元構成の理論開発を行うとともに、教師達がどのような実践知を発達させるかを明らかにし、他の教師達に継承可能な形に、数学的指導知の明確化を図ることに取り組むものである。

## 2. 研究の目的

本研究では2つの領域で、算数と数学の接続過程を構想する。一つは、算数での「数と計算」領域から中学数学の「数と式」領域、とりわけ文字式の証明への接続であり、もう一つは、算数での「図形」領域から中学数学での「図形の証明」への接続である。文字式や図形の証明は中学数学を特徴づける内容であるとともに、生徒が大きな困難を示す内容でもある。

本研究では、これまでの理論的・実践的研究の成果をもとに、上記の教材に関する単元構成を、小・中学校の教師との協働で設計し、実践を行う。とりわけ新教育課程では、生徒の資質・能力の育成が重要な目標になっており、毎時間の授業を同じスタイルで展開するのではなく、単元における教材展開の時間配分や活動様式の選択といったカリキュラム・マネジメントの視点を積極的に取り入れて、単元構成の内実を明らかにし、理論化を図っていく。また、授業実践の後に、質的分析を通して実践を丹念に振り返り、単元を再構成し、カリキュラム化していく。さらにベテラン教師の教材研究や指導技術を、他の教師による指導と比較し、その質的分析研究から、ベテラン教師の教材研究、指導法、その基底にある考え方を明らかにし、「数学指導において生きて働く教師の知識」として定式化する。また、日本の授業研究は、世界的な関心を集めており、積極的な国際発信も行う。これらによって算数と数学の接続を促す教材とその単元構成の内実が明らかにされていくとともに、教師の職能成長に資する教材研究や単元構成のあり方を提案できると考える。

## 3. 研究の方法

研究の方法として、デザイン実験の方法論に則り、理論と実践を往還させながら、実践の分析過程の中から知見を抽出し、概念化するように進める。

理論的には、主として算数と数学の接続に関する先行研究、及び数学的指導知の研究を整理し、単元設計と分析のための枠組みを形成する。授業分析の視点として、文化心理学、物語論、及び記号論の視座を特に吟味して、学級文化の中で児童生徒が、様々な表現を使ったり創り出したりしながら、授業ストーリーを教師とともに創り上げていくプロセスを明確化していく。

次に、実践的な面では、小学校および中学校で、研究代表者が教師と協働して、学校現場の実態を考慮して、授業開発研究にあたり、その分析を通して、理論形成に向かうようにする。特に、単元設計を通じた授業づくりを行い、その中で児童・生徒の学習を、ビデオ、オーディオ、フィールドノートを通して詳細に記録をとり、さらにはビデオデータや音声記録に関しては、テープ興しをして、筆記録の質的分析を実施する。また、児童・生徒へのインタビューも実施して、学びの様相をより細かく丁寧に明らかにしていく。具体的な分析方法として、グラウンデッドセオリアプローチに準じた分析を行い、理論開発を目指す。質的分析を用いて、児童・生徒の学習過程の特徴を分析し、算数を数学に接続する為の単元構成の方法、及び教師の指導法の比較から、数学的指導知の様相や発達過程を明らかにする。数学的な指導知については、教師達と再度検討

し、実践的に使用可能なものとするようにしていく必要がある。

#### 4. 研究成果

研究の成果を次の3点で整理する。

##### (1) 算数・数学の授業分析の視座と授業構成原理

まず、教室文化と算数・数学の授業や単元構成との関連を検討した。特に Bruner の文化心理学を視座として、「問い」を軸とした数学授業との関連を探り、教室文化を背景とした数学授業を吟味する為の基本的な視座を考察した。数学授業の文化性を捉える基礎として、文化と人間の認識の関係、教育への文化心理的アプローチ、文化的認識を支える物語的思考、物語的思考のスキーマとしてのジャンルについて検討し、文化形成の中核に物語的思考があることを述べた。また、物語的思考の特徴として、地平を広げる力、意味の共有可能性、物語の仮定法性の認識、自己を形成する役割を明確にし、これらを算数・数学を分析する視座として捉えた。

また、別の論考にて、時系列性と行為の二重性に焦点を当てた考察を行った。一方では、物語を形作るプロット(筋)をつかみ、それに物語の構成要素を関係づけねばならないが、他方では、プロットは連続する事象からつかんでいかねばならないという面がある。すなわち、行為とプロットは相互依存の関係にあり、この視点から数学授業を捉えると、生徒の多様な反応から生徒の隠れた考え方が徐々に明らかになり、新たな境地が生まれ、このストーリーから授業の結論が得られるという授業の構造を捉えることができる。

この視点をもとに、ベテラン教師と若手教師の授業づくりの比較検討をさらに進めて、何に違いが生じているかを明らかにしていった。特に、算数を専門とするベテラン教師へのインタビューを実施し、教師の実践の意図を顕在化させ、教師に内在する教授原理を抽出することを試みた。教師の談話内容は、「授業内容」、「教師の指導」、「子どもの学習」、「一般的な教師の指導」の4観点であり、細かくは9項目に分類された。ベテラン教師の指導の特徴として、指導を具体的な子どもの学習の姿で述べたり、子どもの活動を指導手順として語ったりしていた。また、子どもの思考の一貫性を保つことに関心をもって授業を構想していることがあげられ、物語の一貫性の視点からの授業観と整合するものとして捉えることができた。

##### (2) 数と計算、数と式の領域における算数と数学の接続過程

まず、わり算概念に焦点を当てて、調査によって判明したわり算理解の困難性を克服するための実験授業を実施・分析し、わり算の指導に関する指導の原理を明らかにした。一つは、意味づくりの方策であり、1に当たる数量を求めるというわり算の意味理解を高めるとともに、そのイメージ形成を促すこと、及びわり算はかけ算の逆演算であることを考慮した指導が必要である。二つ目に、道具づくりの方策であり、比例関係やかけ算の逆を明らかにする上で、数表、数直線、三項関係図などを活用する際に、言葉や定義をあわせて道具化していくことが重要であるという知見を得た。三つ目は、意味づくりと道具作りの往還であり、両者に往還の場を設けることが効果的である。四つ目は、社会的相互作用の活用であり、仲間との話し合いで考えを修正し高めていきながら、正しさについて協議することの重要性を指摘している。

次に、中学2年の文字式の証明指導の改善を目指して、操作的証明を学習過程に位置づけ、操作的証明と形式的証明とが相互構成される過程について、理論的かつ実践的に研究を行った。その結果、「操作的証明をもとに形式的証明を導く過程」と「形式的証明をもとにした操作的証明の探究過程」によって、文字式の証明に対する深い理解を促す学習過程を想定することができることが分かった。特に、操作的証明と形式的証明の相互構成過程によって、負の数の概念が関わる連続した文字式の証明に対して操作的証明を行うことができることが示唆された。

最後に、中学2年生が証明学習の後に形成しうる数学的アイデンティティの様相についても、理論的かつ実証的に研究を行った。アイデンティティについて世界的に実施されている研究を概観し、数学的アイデンティティの捉え方を明確化した。さらに、文字式の証明の学習を終えた中学2年生の「振り返りシート」を対象として、質的分析から、文字式の証明の学習における生徒の振り返りの視点を抽出し、さらにそこから見える数学的アイデンティティに関わる視点を再整理し、文字式の証明の学習後の生徒の数学的アイデンティティの形成の様相を明らかにしていった。振り返りの視点として、(a) 自己の達成感・困難性、(b) 文字式の証明の形式性、(c) 文字式の証明の一般性、(d) 文字式の証明の簡潔性、(e) 自己の過去・未来との関わり、(f) 学習内容の理解、(g) 学習方法の理解、(h) 文字式の道具性・活用性、(i) 自己と他者の関わりが抽出された。また、生徒の数学的アイデンティティとして、「数学の内容に自分なりの価値を見出すことに関するアイデンティティ」、「他者に伝えることと数学的表現に関するアイデンティティ」、「数学で学んできたことをこれからの自分に活かすことに関するアイデンティティ」の3つを特定した。これらの数学的アイデンティティは、算数から数学への移行を特徴付ける一つの指標となり得ると考える。

##### (3) 図形領域における算数と数学の接続過程

まず、小学6年生段階での空間図形に対する論理的説明の様相について吟味した。小学校から中学校にかけて論理的説明の育成を図るために、小学校高学年に焦点を当て、児童の論理的説明の発達を吟味できる理論的視点や発達の指標を設定するとともに、インタビュー調査を通して

児童の空間図形の論理的説明の発達の様相を明らかにしていった。成果として、第一に、空間図形の論理的な思考の発達が、実物（およびそのイメージ）、見取図、展開図、投影図の四者関係からなる四面体モデルによって捉えることができることが示された。特に、図から図への変換に関わる子どもの言動を吟味していくことで、子どもの論理的説明の様相を捉えることができた。2点目に、小学校を卒業する時点で、児童は、実物があるなどの一定の環境下では、かなり難易度の高い問題を協働で解決したり、論理的な説明を行ったりすることができる能力を有していることが示された。法則・原理までの説明は難しいものの、それを探究しようとする児童は半数程度いることが示された。この知見からは、現行の中学校1年での空間図形の学習は、より探究的なものに行うことができる可能性が高く、直観的思考と論理的思考を養うためのカリキュラム開発の研究が今後必要になると考える。

中学校数学に関しては、まず、図形の証明の構成過程に焦点を当てて、生徒のジェスチャー行為の役割に関する研究を実施した。ジェスチャーを視点とした記号解釈過程をもとに、生徒の図や言語を解釈する様相を分析し、証明を構成する過程において解釈過程を促進させる可能性のあるジェスチャーの役割を吟味した。その結果、証明の部分的構成に関しては、要素に基づく図形の明確化と推論の形の明確化の役割があること、特に結論をなぞることで解析的に部分的配列図を見出すこと、また、仮定と結論をなぞることで、それを結ぶ定理を見出すことに繋がり得ることを明らかにした。証明の一般性の理解促進に関しては、言語の変化と図の変化の関連付け、及び推論間の関連付けの2つの役割を指摘した。言語に込められた数学的プロセスをジェスチャーで視覚化することや、過去の証明過程を現在の図上で再現することで、推論の方法の違いや本質を見抜くことへ繋がり、それを図の記号の順序関係に合わせて行うことで、より幾何的対象とし図を捉えることができる可能性が高まるといことが示唆された。自己と他者の解釈を結ぶ間的内的解釈過程では、ジェスチャーは共通の対象の生成を促進させる可能性があること、特に図や言語とともにジェスチャーを用いることで、それぞれの関連付けが図られ、自らの対象を見直すことへと繋がりうるということが示唆された。

次に、中学校3年の証明指導に焦点を当てて、証明言語の生成と振り返りを通して、証明理解のレベルを高めるための要件について検討を行った。証明全体を振り返り、仮定を意識・理解することを「証明の仮定の意識化」と呼び、証明の仮定を、証明における「場合分け」の必要性の理解を通して意識化する意義と方法を明確化することをねらいとした。結果として、証明に用いた「図が違うこと」と「記号や文章が違うこと」を理由にして、「場合分け」の必要性を説明できることが証明の仮定の意識化につながるということが示唆された。証明の「場合分け」は、最初は直観的に把握したとしても、証明言語を通して「場合分け」の必要性が問われなくては、本当に証明の仮定が意識化されたとは言えず、証明に用いた記号や文章の量的・質的違いの視点から証明を振り返ることによって、仮定の意識化が図られることを示した。

さらに、証明を探究活動として捉え、特にプラグマティズムの視点から、現象の理解を目指した証明活動を捉える枠組みについての検討を行った。まず、理解のための証明を捉えるプラグマティックな視点を、証明活動の前提（数学的現象の理解）、証明活動の方法（複数の現象・概念を結ぶ）、証明活動の特徴（「定理」とその証明の再理解）について検討し、この視点から証明を捉えることで、証明で出現する概念の統合的かつ論理的な理解を促す様子を想定することができた。一つの命題に対する複数の証明の比較や、定理の意味の再検討を行う学習場面の必要性についても指摘した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 小野翔平, 岡崎正和	4. 巻 25(2)
2. 論文標題 小学6年生の空間図形に対する論理的説明の様相に関する研究	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 全国数学教育学会, 数学教育学研究	6. 最初と最後の頁 37-53
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.32296/jjsme.100.R111_29_2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 渡邊慶子, 岡崎正和	4. 巻 52
2. 論文標題 理解のため証明を捉える枠組み構築: プラグマティズム的証明観に着目して	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 第52回秋期研究大会発表集録	6. 最初と最後の頁 439-442
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masakazu Okazaki, Koji Okamoto, Tatsuo Morozumi	4. 巻 12
2. 論文標題 Characterizing the quality of mathematics lessons in Japan from the narrative structure of the classroom: "Mathematics lessons incorporating students' 'questions' as a main axis" as a leading case	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Hiroshima Journal of Mathematics Education	6. 最初と最後の頁 49-70
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Masakazu Okazaki	4. 巻 1
2. 論文標題 Perspectives needed to examine the quality of a structured problem-solving lesson for teachers' professional development	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceedings of the 8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education	6. 最初と最後の頁 123-135
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 渡邊慶子, 岡崎正和	4. 巻 51
2. 論文標題 証明言語の生成と振り返りを通した仮定の意識化に関する研究	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 日本数学教育学会, 秋期研究大会発表集録	6. 最初と最後の頁 503-506
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 中原忠男, 前田一誠, 山口武志, 岡崎正和, 影山和也	4. 巻 12
2. 論文標題 多世界パラダイムに基づくわり算概念の構成とその学習指導の改善に関する研究	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 環太平洋大学紀要	6. 最初と最後の頁 237-249.
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 穴戸建太, 岡崎正和	4. 巻 23(2)
2. 論文標題 図形の証明の構成過程におけるジェスチャーの役割に関する研究	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 全国数学教育学会, 数学教育学研究	6. 最初と最後の頁 141-149
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.24529/jasme.23.2_141	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 木村恵子, 岡崎正和, 渡邊慶子	4. 巻 23(2)
2. 論文標題 算数科教師に内在する授業構成原理に関する研究 - 昭和初期の算術授業を対象として -	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 全国数学教育学会, 数学教育学研究	6. 最初と最後の頁 15-29
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 岡崎正和	4. 巻 5
2. 論文標題 Brunerの文化心理学を視座とした数学授業の文化性の探究 - 「問い」を軸とした数学授業との関連 -	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 日本数学教育学会, 第5回春期研究大会論文集	6. 最初と最後の頁 181-188
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 西山航, 岡崎正和	4. 巻 26(2)
2. 論文標題 中学2年の文字式の証明における操作的証明と形式的証明の相互構成過程の研究	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 全国数学教育学会, 数学教育学研究,	6. 最初と最後の頁 83-93
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 岡崎正和	4. 巻 8
2. 論文標題 平面図形と空間図形の連動による小中一貫の空間図形カリキュラムを構成する為の視座	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 日本数学教育学会, 第8回春期研究大会論文集	6. 最初と最後の頁 97-104
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 渡邊慶子, 岡崎正和
2. 発表標題 証明の仮定の意識化に関する研究 その意義と方法
3. 学会等名 全国数学教育学会, 第49 回研究発表会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 岡崎正和
2. 発表標題 新しい学習指導要領下での算数・数学科の授業づくり 不易と流行
3. 学会等名 第25 回岡山大学算数・数学教育学会談話会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 小野昇平, 岡崎正和
2. 発表標題 小学校高学年における空間的思考の発達の様相 - 実物, 見取り図, 展開図, 投影図の四者関係を視点とした質的分析研究 -
3. 学会等名 全国数学教育学会, 第47 回研究発表会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masakazu Okazaki
2. 発表標題 Classroom culture and genre for developing narratively coherent mathematics lessons
3. 学会等名 the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 岡崎正和
2. 発表標題 「課題探究として証明することを実現する授業と指導法開発」研究から学ぶことといくつかの問い
3. 学会等名 日本科学教育学会, 第41回年会
4. 発表年 2017年



1. 発表者名 岡崎正和
2. 発表標題 数学教育学研究と教材開発
3. 学会等名 全国数学教育学会，第46回研究発表会（招待講演）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 小野翔平，岡崎正和
2. 発表標題 小学校高学年における空間的思考の発達の様相 - 実物，見取り図，展開図，投影図の四者関係を視点とした質的分析研究 -
3. 学会等名 全国数学教育学会，第47 回研究発表会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 中市聖人，岡崎正和
2. 発表標題 中学2年生の数学的アイデンティティの形成の様相：「文字式の証明」の学習後の振り返りを基にして
3. 学会等名 全国数学教育学会，第53 回研究発表会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 岡崎正和，影山和也，和田信哉，渡邊慶子，太田伸也
2. 発表標題 平面図形と空間図形の連動を視点とした小中一貫の図形カリキュラムの開発研究（1）
3. 学会等名 日本数学教育学会，第8 回春期研究大会
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------