

令和 2 年 6 月 29 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K05155

研究課題名(和文) アソシエーション・スキームの固有値と有限群の指標

研究課題名(英文) Eigenvalues of association schemes and characters of finite groups

研究代表者

宗政 昭弘 (Munemasa, Akihiro)

東北大学・情報科学研究科・教授

研究者番号：50219862

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：主な研究成果は、可換アソシエーション・スキームの非可換アソシエーション・スキームよりも自然な一般化として、ファイバー可換コヒアラント配置を挙げることができることを、説得力のある理論の構成により示したことである。ファイバー可換コヒアラント配置が可換アソシエーション・スキームの自然な一般化である理由は、固有行列やクライン数を自然に定義できることによる。クライン数に関する有名なクライン条件は、クライン数のなす行列の半正定値性として一般化された。ファイバー可換コヒアラント配置は、一般化された四角形など、深く研究されている結合構造に自然に現れる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

可換アソシエーション・スキームにおいて線形計画限界が様々な組合せ論の問題に応用できることはよく知られているが、その基礎になっているのは有限群の指標表の類似である固有行列と呼ばれる正方行列である。この固有行列、およびそれに付随して得られるクライン数をファイバー可換なコヒアラント配置に対して一般化することに成功し、クライン数を一般化したクライン行列と呼ばれるものを定義した。クライン数が非負の実数であることの類似として、クライン行列が半正定値であることを証明し、重複度を用いたアソシエーション・スキームの点の数の上限がファイバー可換であるコヒアラント配置に対しても一般化できることを示した。

研究成果の概要(英文)：Our main contribution is to demonstrate that fiber-commutative coherent configuration is a more natural generalization of commutative association schemes, than noncommutative association schemes. The reason why we believe fiber-commutative coherent configurations are more natural is that we can define canonically an analogue of eigenmatrix and Krein parameters. The well-known Krein condition can be generalized to positive semidefiniteness of matrices of Krein parameters for fiber-commutative coherent configurations. Fiber-commutative coherent configurations naturally appear as well-studied incidence structures, such as generalized quadrangles.

研究分野：数学

キーワード：有限置換群 アソシエーション・スキーム 指標表 固有値 グラフ アダマール行列

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

符号理論・デザイン理論に代数的方法を適用することは、Delsarte [2] によって 1973 年にアソシエーション・スキームという枠組みの中で定式化され、それまで知られていた多くの結果、特に限界式が統一的な方法で導かれることが示された。一方、アソシエーション・スキームの理論は、有限群の指標の理論の組合せ論的一般化であるという立場で Bannai & Ito [1] は理論を構成し、さまざまな問題を提起した。そのうち、最も重要とされている distance-regular graph や P- and Q-多項式アソシエーション・スキームの分類は、近年 Ito, Terwilliger らによって量子群の表現論を用いて大きく発展を遂げている。

2. 研究の目的

クラインパラメータや固有行列の理論を非可換アソシエーション・スキームに一般化し、半正定値計画法の代数的基礎付けを与えることを将来の目的に置いた。さまざまなアソシエーション・スキームの具体例に関して、固有空間を具体的に知る必要があるが、固有空間の特徴づけは組合せ論的に応用があるため、個別の例については専門家から知識を収集する。非原始的な場合と原始的な場合に分けて、固有行列の理論の一般論を構築する障害を明らかにするとともに、非原始的だが可換に近いような実例について、固有行列の例を計算して示す。

3. 研究の方法

有限群の通常表現の理論はよくわかっており、これ以上一般論を研究する余地はないが、置換表現にのみ登場するアソシエーション・スキームの固有値は、ユニタリ表現論における帯球関数と呼ばれているものの有限版であり、表現の既約分解のみからは得られない情報が含まれている。それゆえ、置換表現にのみ有効な研究手法が必要であり、群の構造論の研究者と表現論の研究者の両方から協力を得る必要がある。しかしながら、群論の研究者はいくらアソシエーション・スキームの理論が置換群の表現論とほぼ同じと説明しても、なかなか群を使わない技術には興味を示さない。そこで、群から来る実例の研究を初めとして群論の研究者の興味を誘い、彼らから得た技術のうち群なしでも適用できるものを抽出して一般のアソシエーション・スキームの理論を発展させることを考えた。これを推し進めるために、有限群論とアソシエーション・スキームの理論の両方に精通した研究者を集めて、研究分担者と協力して研究資源を有機的に結び付けて研究を進めた。上記のような体制で研究を進め、得られた研究成果は国内だけでなく海外での研究集会でも発表した。特に近年ロシアにおいて継続的に開催されている群論と組合せ論の研究集会は、アソシエーション・スキームも重要な研究テーマと位置づけており、ロシアには、アソシエーション・スキームの専門家も多い。研究成果の発表と共同研究のため、ロシア・ノボシビルスク国立大学で開催された専門家向けサマースクールに参加した。

4. 研究成果

可換アソシエーション・スキームの指標表に関する色々な問題について多角的に研究した。具体的には、アソシエーション・スキームのクラインパラメータと有限群の既約表現のテンソル分解係数の間の関係の明確化と、アソシエーション・スキームの固有値が有限群の指標値と同様に円分体に属するかという問題について、特殊な例について考察し一部肯定的・否定的な研究成果を得た。アソシエーション・スキームが非可換の場合についても、指標表の類似が自然に定義されることがあり、よく知られた例の中にそのようなものが多く存在していることもわかってきた。そこでこれらの指標表について具体的に計算し決定した。また、有限群の作用を仮定しないアソシエーション・スキームであっても、強い組合せ論的性質を仮定するとそこに自己同型の存在が導かれることがある。弱距離正則有

向グラフで次数が小さい場合に注目し、そのような事実からグラフの被覆を構成する方法を導出した。また、研究分担者の生田氏と協力して、非対称的なアソシエーション・スキーム上に複素アダマール行列を構成する方法を研究し、具体例を考察することから一般的な構成法を予想した。それによって、標数4のガロア環から実例が構成できることを発見した。この例は研究代表者が25年以上前に研究した非可換アソシエーション・スキームの指標表とも関連することがわかり、当時の研究が役立った。また、この研究成果については学会で発表するとともに共著論文を出版した。

また、アソシエーション・スキームが非可換の場合についても、指標表の類似が自然に定義されることがあり、よく知られた例の中にそのようなものが多く存在していることもわかってきた。そこでこれらの指標表について具体的に計算し決定した。また、このような設定の類似として、ファイバーが可換であるコヒアラント配置について、より明解な理論を構成できることに気づいた。これにより、ファイバーが可換であるコヒアラント配置についても指標表やクライン数の一般化が定義できることがわかり、クライン条件が不等式としてでなく、ある行列の半正定値性として定式化できることがわかった。さらに、重複度を用いたアソシエーション・スキームの点の数の上界がファイバーが可換であるコヒアラント配置に対しても類似を定式化することができた。今後はこれらの成果の具体的な応用例を探ること、またデルサルトによる線型計画法の一般化として知られる半正定値計画法との関連を調査することになっている。また、研究分担者の生田氏と協力して、非対称的なアソシエーション・スキーム上に複素アダマール行列を構成する方法を研究し、エルミート行列ではない非対称複素アダマール行列が非対称的なアソシエーション・スキーム上に構成できることを発見した。

アソシエーション・スキームの指標表に関する研究成果をスロベニアで開催された国際学会において発表した。そこでは可換なアソシエーション・スキームに関するクライン条件をファイバー可換な場合に一般化できたことを、行列に関する半正定値という自然な結論で述べた。この発表に対し、専門家から建設的なコメントを複数もらい、今後の応用研究の方向について示唆を受けた。また、アソシエーション・スキームの特別な場合である強正則グラフについて、同じ指標表をもつ非同型な例を構成する方法について研究を行った。これまで知られているスイッチングと呼ばれる構成法を一般化することで、有限幾何と関連する強正則グラフに新しい種類のスイッチングを適用できることを示した。さらに、グラフの固有値の振る舞いについてホフマンの定理の一般的な定式化を実行し、エルミート行列も含む形にしたところ、有向グラフのエルミート隣接行列に適用できることがわかった。この研究成果は複数の国際学会や国内学会で発表し、論文を投稿した。

また、研究分担者の生田氏と、アソシエーション・スキームの隣接代数内に構成できるアダマール行列の可能性について、クラスが小さい場合に分類を完成させた。研究分担者の野崎氏は、アソシエーション・スキームにおけるデルサルトの線形計画限界の導出法を、一般の正則グラフにおいても定式化できることを示した。研究分担者の須田氏は、ハミングアソシエーション・スキームにおけるタイト4デザインのうち、存在が未解決であった最後の系列について、クライン数から得られる数え上げ条件を巧妙に利用して非存在を示した。

参考文献

- [1] E. Bannai and T. Ito, Algebraic Combinatorics I: Association Schemes, Benjamin/Cummings, 1984.
- [2] P. Delsarte, An algebraic approach to the association schemes of coding theory, Philips Research Reports Suppl. **10** (1973).

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件 / うち国際共著 4件 / うちオープンアクセス 8件）

1. 著者名 Ihringer Ferdinand, Munemasa Akihiro	4. 巻 580
2. 論文標題 New strongly regular graphs from finite geometries via switching	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6. 最初と最後の頁 464 ~ 474
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.laa.2019.07.014	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Ding Cunsheng, Munemasa Akihiro, Tonchev Vladimir D.	4. 巻 65
2. 論文標題 Bent Vectorial Functions, Codes and Designs	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 IEEE Transactions on Information Theory	6. 最初と最後の頁 7533 ~ 7541
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1109/TIT.2019.2922401	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Ikuta Takuya, Munemasa Akihiro	4. 巻 35
2. 論文標題 Complex Hadamard Matrices Attached to a 3-Class Nonsymmetric Association Scheme	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1293 ~ 1304
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-019-02044-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Ito Keiji, Munemasa Akihiro	4. 巻 27
2. 論文標題 Krein Parameters of Fiber-Commutative Coherent Configurations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Algebra Colloquium	6. 最初と最後の頁 1 ~ 10
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S1005386720000024	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Betty Rowena Alma L., Munemasa Akihiro	4. 巻 11929
2. 論文標題 Classification of Self-dual Codes of Length 20 over Z_4 and Length at Most 18 over F_2+uF_2	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Lecture Notes in Comp. Sci.	6. 最初と最後の頁 64 ~ 77
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-35199-1_4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Nozaki Hiroshi	4. 巻 342
2. 論文標題 Largest regular multigraphs with three distinct eigenvalues	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 2134 ~ 2138
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disc.2019.04.016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Cioaba Sebastian M., Koolen Jack H., Nozaki Hiroshi	4. 巻 2
2. 論文標題 A spectral version of the Moore problem for bipartite regular graphs	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Algebraic Combinatorics	6. 最初と最後の頁 1219 ~ 1238
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/alco.71	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Nozaki Hiroshi, Suda Sho	4. 巻 60
2. 論文標題 Complex Spherical Codes with Three Inner Products	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Discrete & Computational Geometry	6. 最初と最後の頁 294 ~ 317
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi.org/10.1007/s00454-018-0017-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Takuya Ikuta and Akihiro Munemasa	4. 巻 6
2. 論文標題 Butson-type complex Hadamard matrices and association schemes on Galois rings of characteristic 4	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Special Matrices	6. 最初と最後の頁 1-10
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi.org/10.1515/spma-2018-0001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計32件 (うち招待講演 13件 / うち国際学会 17件)

1. 発表者名 Akihiro Munemasa
2. 発表標題 Krein parameters of fiber-commutative coherent configurations
3. 学会等名 The 9th Slovenian International Conference on Graph Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akihiro Munemasa
2. 発表標題 Hoffman's Limit Theorem
3. 学会等名 The International Conference and PhD-Master Summer School on Groups and Graphs Designs and Dynamics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 宗政昭弘
2. 発表標題 Digraphs with Hermitian spectral radius at most 2
3. 学会等名 Japanese Conference on Combinatorics and Applications 2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 宗政昭弘
2. 発表標題 Fomin's Improvement of the Thompson-Wielandt Theorem
3. 学会等名 有限群論草津セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akihiro Munemasa
2. 発表標題 Hermitian adjacency matrices of digraphs and root lattices over the Gaussian integers
3. 学会等名 International Conference on Algebraic Combinatorics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akihiro Munemasa
2. 発表標題 Equiangular lines in Euclidean spaces
3. 学会等名 Frontiers in Mathematical Science Research Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akihiro Munemasa
2. 発表標題 Extremal finite sets in spheres and projective spaces
3. 学会等名 Indo-Japan joint workshop on quantum computation and quantum information (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Nozaki
2. 発表標題 Linear programming bounds for regular uniform hypergraphs
3. 学会等名 The 22nd Conference of the International Linear Algebra Society (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Nozaki
2. 発表標題 Maximal 2-distance sets containing the regular simplex
3. 学会等名 Tenth Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Nozaki
2. 発表標題 Linear programming methods to obtain bounds on the order of regular graphs
3. 学会等名 Joint Workshop on Algebraic Combinatorics and Cryptography
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Hiroshi Nozaki
2. 発表標題 Linear programming bounds for regular uniform hypergraphs
3. 学会等名 Sendai Workshop on Combinatorics
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 生田卓也
2. 発表標題 Bordered complex Hadamard matrices and strongly regular graphs
3. 学会等名 第36回代数的組合せ論シンポジウム
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takuya Ikuta
2. 発表標題 Bordered complex Hadamard matrices and strongly regular graphs
3. 学会等名 International Conference on Algebraic Combinatorics (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 須田庄
2. 発表標題 On tight 4-designs in Hamming association schemes
3. 学会等名 第36回代数的組合せ論シンポジウム
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Nozaki
2. 発表標題 Maximizing the order of regular bipartite graphs for given valency and second eigenvalue
3. 学会等名 The Japanese Conference on Combinatorics and its Applications 2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Nozaki
2. 発表標題 Maximal 2-distance sets containing the regular simplex
3. 学会等名 代数的組合せ論と関連する群と代数の研究
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Nozaki
2. 発表標題 Linear programming bounds for regular uniform hypergraphs
3. 学会等名 スペクトラルグラフ理論および周辺領域 第7回研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takuya Ikuta
2. 発表標題 Complex Hadamard matrices attached to 3-class nonsymmetric association schemes
3. 学会等名 The Japanese Conference on Combinatorics and its Applications 2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takuya Ikuta
2. 発表標題 Complex Hadamard matrices attached to non symmetric 3-class association schemes
3. 学会等名 日本数学会秋季大会 岡山大学
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takuya Ikuta
2. 発表標題 An approach of construction of complex Hadamard matrices in terms of association schemes
3. 学会等名 実験計画法ならびに情報数理と関連する組合せ構造
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takuya Ikuta
2. 発表標題 Complex Hadamard matrices coming from association schemes
3. 学会等名 代数的組合せ論と関連する群と代数の研究
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Akihiro Munemasa
2. 発表標題 The Reed-Muller code $RM(1,4)$, the Barnes-Wall lattice $BW(16)$, and graphs with smallest eigenvalue -3
3. 学会等名 The 2nd Tohoku-Bandung Bilateral Workshop, Extremal Graph Theory, Algebraic Graph Theory and Mathematical Approach to Network Science
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Akihiro Munemasa
2. 発表標題 A graph with smallest eigenvalue -3 related to the shorter Leech lattice
3. 学会等名 博多ワークショップ夏の集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Akihiro Munemasa
2. 発表標題 A variation of Godsil-McKay switching
3. 学会等名 An International Workshop on Algebraic Combinatorics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Akihiro Munemasa
2. 発表標題 Krein parameters of fiber-commutative coherent configurations
3. 学会等名 Taipei International Workshop on Combinatorics and Graph Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akihiro Munemasa
2. 発表標題 Krein conditions for coherent configurations
3. 学会等名 Ural Workshop on Group Theory and Combinatorics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akihiro Munemasa
2. 発表標題 Butson-Hadamard matrices in association schemes of class 6 on Galois rings of characteristic 4
3. 学会等名 Workshop on Group Theory and Algebraic Combinatorics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 HiroshiNozaki
2. 発表標題 Maximizing the order of regular bipartite graphs for given valency and second eigenvalue
3. 学会等名 International Workshop on Bannai-Ito Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 野崎寛
2. 発表標題 第二固有値を固定したときの連結正則二部グラフの頂点数に対する上界
3. 学会等名 第34回代数的組合せ論シンポジウム
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takuya Ikuta
2. 発表標題 Butson-type complex Hadamard matrices and association schemes on Galois rings of characteristic 4
3. 学会等名 5th Workshop on Real and Complex Hadamard Matrices and Application (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Akihiro Munemasa
2. 発表標題 Imprimitive permutation groups which are nearly multiplicity-free
3. 学会等名 International Workshop on Bannai-Ito Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takuya Ikuta
2. 発表標題 Complex Hadamard matrices attached to 3-class commutative nonsymmtric association schemes
3. 学会等名 Hadamard Matrices and Applications
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	生田 卓也 (Ikuta Takuya) (70271111)	神戸学院大学・法学部・教授 (34509)	
研究分担者	野崎 寛 (Nozaki Hiroshi) (80632778)	愛知教育大学・教育学部・講師 (13902)	
研究分担者	須田 庄 (Suda Sho) (30710206)	防衛大学校・総合教育学群・准教授 (82723)	