様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　４年　４月１５日現在

機関番号：１２５０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2017～2021
課題番号：１７Ｋ０５１６１

研究課題名（和文）有限群のベキ零部分群複体と付随するクイバーの表現

研究課題名（英文）Nilpotent subgroup complexes of finite groups and associated quiver representations

研究代表者
澤邉　正人（Sawabe, Masato）

千葉大学・教育学部・教授

研究者番号：６０３４６６２４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,800,000円

研究成果の概要（和文）：有限群の部分群族は部分群の間の包含関係により半順序集合，順序複体，クイバーとみなすことができる。まず非可解群に対する非自明なベキ零部分群複体のホモロジー群を決定した。また部分群全体からなるクイバーの表現論を提案しその基礎を構築した。ある種のベキ零部分群複体に対して d-カバーという概念を導入し，特に 1-カバーの特徴付けを行った。さらに 2-カバーから導かれる群論的性質を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
世の中のあらゆるところに存在する対称性を抽象化した数学的対象は群と呼ばれる。群はある種の代数系であるが、群が有する沢山の部分群におけるその配置を幾何学的に考察し、その情報を元の群の性質にフィードバックさせることが本研究の特徴である。学術的に本研究成果は有限単純群の統一的理解への示唆を与えるものである。また社会的は一般的な対称性の数学的理解を与えるものである。

研究成果の概要（英文）：A family of subgroups of a finite group can be regarded as a partially ordered set, an order complex, or a quiver with respect to the inclusion relation among the subgroups. First, we determined the homology group of the complex of non-trivial nilpotent subgroups of a finite non-solvable group. Second, we proposed the quiver representation associated to the complex of the totality of subgroups, and developed the basis for it. Third, we introduced the concept of d-cover for a certain complex of nilpotent subgroups, and in particular we characterized 1-cover. In addition, we proved the group-theoretic nature derived from the 2-cover.

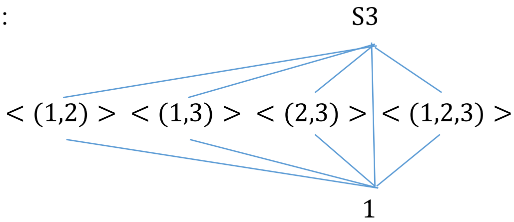
研究分野：有限群

キーワード：有限群　単体複体　表現論

１．研究開始当初の背景

研究主対象である有限群 G の部分群複体とは：G の部分群全体を S(G) で表す。部分群族 $D \subseteq S(G)$ を通常の包含関係で半順序集合と見なしたときの順序複体を G の部分群複体といい，同じ記号の D で表す。

【右図：3 次対称群 S3 と複体 S(S3) の例】



部分群複体の起源は 1970 年代に行われた D. Quillen や K.S. Brown の仕事にまでさかのぼる。ここでは特に非自明な p-部分群全体からなる複体 Sp(G) に着目し，そのオイラー標数に関する合同式や，Sp(G) に対するホモトピー変形の基礎理論が整備された。その後も申請者らによって部分群複体の研究は継続されてきたが，本質的には Sp(G) とホモトピー同値となるような p-部分群複体のみが考察対象となってきた。これらの状況を踏まえて，申請者らは部分群複体に関する以下のような 2 つの新しい概念（1)，(2) を導入した。

（1) 部分群複体 D をクイバーと見なすこと（Iiyori-Sawabe, TJM 2014)：部分群複体は半順序集合の順序複体である。そこで包含関係 $H < K$ があるところに矢印 $(H \leftarrow K)$ を定義することにより D にはクイバーの構造が入る。これは小圏をクイバーと見なす一般的な方法であるが，有限群の範疇ではこれまでに無い新しい発想である。これによって D をクイバーやそれに付随するパス代数，或いはクイバーの表現論を用いて考察することが可能になる。

（2) Sp(G) の拡張概念の導入（Iiyori-Sawabe, OJM 2016)：素数の集合 π に対してベキ零 π-部分群全体からなる Nπ(G) を導入する。特に π が素数 p からなる 1 点集合の場合 Nπ(G) は Sp(G) を与える。つまり Sp(G) の自然な一般化である。また異なる素数 $p, q \in \pi$ に対して Sp(G) と Sq(G) を Nπ(G) の中で同時に扱うことが出来る利点を備えている。

２．研究の目的

これまでの部分群複体の研究は p-部分群に限定するものが殆どであった。そこで先行研究として申請者らは p-部分群複体の概念を含むベキ零部分群複体を新たに導入すると同時に，複体そのものをクイバー見なし，付随するパス代数など用いた群の解析方法を確立した。部分群複体をクイバーと見なす発想は有限群論に於いてはこれまでにないアイデアである。本研究では対象となるベキ零部分群複体を具体的に考察すると同時に，クイバーである複体の表現を有限群 G やその指標環に応用し，G に内蔵する構造および表現の解明を進めた。

本研究目的は，上記の新しいアイデア（部分群複体をクイバーと見なし、複体の表現論を展開していくこと）をさらに発展させ，有限群の構造論や表現論に応用することである。計画を進めていく上で，申請者は次のような予備的な研究結果 (1),(2),(3) を得ていた。これらは本研究の基盤を成す。

（1) S(G) の パス代数を A とする。ある自然な A-加群 M の自己準同型からなる代数 U を定義し U から定まる生成定数を新たに導入した。この定数を用いてベキ零群の特徴付けを行った（Iiyori-Sawabe, TJM 2014)。

（2) Nπ(G) と互いにホモトピー同値となる極小な部分複体 $L\pi(G) \subseteq N\pi(G)$ を特定した。Lπ(G) に関する基本的なホモトピー同値性を証明した。対称群に関する Lπ(G) を完全に決定した（Iiyori-Sawabe, OJM 2016)。

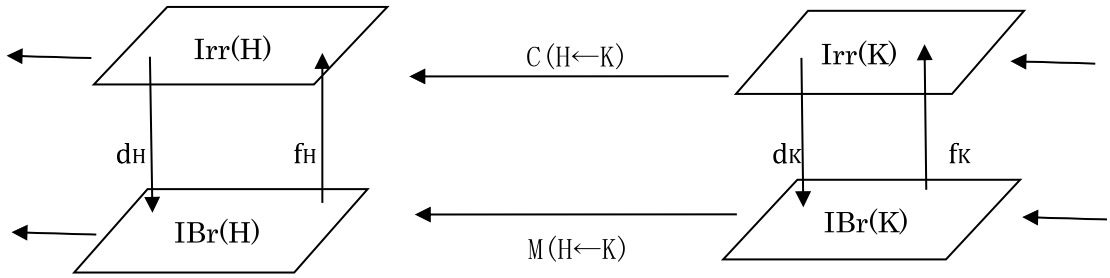
（3) クイバー S(G) を自然に単体複体と見なし，この複体に関するオイラー標数・ホモロジー・連結性・コセット幾何など様々な基本性質を証明した（Iiyori-Sawabe, OJM 2015)。

３．研究の方法

本研究の目的は p-部分群複体 Sp(G) の拡張概念であるベキ零部分群複体 Nπ(G) と Lπ(G) を元の群 G の構造および表現の解明に応用することである。特に複体をクイバーと見なし，その表現論を用いることが本研究の特徴である。

（1) 指標環を用いたクイバーの表現：G を有限群とする。研究主対象であるベキ零部分群複体 Nπ(G)，Lπ(G) または S(G) を取りあげ，これをクイバーと見なす。さらに，クイバー Nπ(G) の表現 C として，頂点 $H \in N\pi(G)$ に対して指標環 $C(H) := Z[\mathrm{Irr}(H)]$ を対応させ，矢印 $(H \leftarrow K)$（即ち包含関係 $H < K$）に対して制限写像 $C(H \leftarrow K) := \mathrm{res}: Z[\mathrm{Irr}(H)] \rightarrow Z[\mathrm{Irr}(K)]$ を対応させる。ここで Irr(H) は H の複素既約指標全体である。一方 IBr(H) を H の p-ブラウアー既約指標全体としたとき，Irr(H) の代わりに IBr(H) を用いた Nπ(G) の表現 M が同様に定義される。C から M への自然な準同型を d とし，さらにその転置を f とすれば，部分群の指標に関

する様々な情報をクイバーの表現を用いて一挙に把握することが出来る。



クイバー $N\pi(G)$ の表現 C や M に付随する次数付き代数を用いて，元の群 G の性質や特徴を明らかする。即ち部分群複体 $N\pi(G)$ やその表現による有限群への応用を進める。一方，表現 C および M は頂点に対して既約指標全体を $\mathbb{Z}$-自由基とする $\mathbb{Z}$-代数を対応させている。そこでこの一般化として可換環 R を用意し，頂点に対して R-自由基を有する R-代数を対応させるような表現を取りあげ，その基礎理論の整備を行う。これにより C や M の本質を明らかにすると同時に，クイバーの表現を用いた指標理論の統一的理解を進める。

(2) 2 つの素数 p と q の相互関係：ベキ零部分群複体 $N\pi(G)$（あるいは $L\pi(G)$）の導入の動機は，1つの素数 p に対して定義される p-部分群複体 $Sp(G)$ の拡張概念を手にすることであった（Iiyori-Sawabe，OJM 2016)。即ちこれにより $Sp(G)$ と $Sq(G)$ を同時に考察することが可能となった。特に $Sp(G)$ と $Sq(G)$ の複体構造は全くの独立ではなく，互いに影響を及ぼし合っていることが予想される。$N\pi(G)$ やその変形に幾何的な条件を課し，G の性質にフィードバックさせる。

４．研究成果

(1) ベキ零部分群複体： G を有限非可解群とし，$N(G)$ を G の非自明なベキ零部分群全体からなる複体とする。$N(G)$ は $\pi = \pi(G)$ としたときの $N\pi(G)$ である。ここでは有理整数環 $\mathbb{Z}$ 上のホモロジー $Hn(N(G))$ の構造を考察した。これは G の素数グラフの連結成分 π に対して $Hn(N\pi(G))$ の構造に帰着される。特に素数 2 を含む連結成分 π1 に対して $Hn(N\pi1(G))$ が分かれば全体の $Hn(N(G))$ が分かることを明らかにした． 具体例としてモンスター単純群 M に対する 0 次のホモロジー，A 型の単純群 $PSL(2,9)$，$PSL(2,q)$（q は偶数)，5 次対称群 S5 のホモロジーの計算を遂行した。この研究結果は数学専門誌 Tokyo Journal of Mathematics に掲載済みである。

(2) ブラウアー指標に関わる類関数について：

① 有限群 G と自然数 n に対して G 上の方程式 $X^n = e$ の解集合を $Ln(G)$ で表す。$cf(Ln(G))$ を $Ln(G)$ 上の複素数値 G-類関数全体からなる代数とする。指標環 $Z[Irr(G)]$ を $Ln(G)$ で制限した $cf(Ln(G))$ の部分環を $Bn(G)$ で表す。素数の集合 π に対して G の位数の π’部分を m としたとき $B\pi(G)$ を $Bm(G)$ で定める。π を素数 p の一点集合としたとき $Bp(G)$ は G の一般 p−ブラウアー指標環を与える．即ち，我々の $cf(Ln(G))$ や $Bn(G)$ はブラウアー指標の自然な一般化である．ここでは $cf(Ld(H))$（d は自然数，H は G の部分群）上に内積を定義し，これらの代数の間にあるフロベニウス相互律（内積を介した誘導・制限の関係）の類似を証明した。その応用として一般指標の間に成り立つ合同式を新たに証明した。

② p-ブラウアー指標環 $Z[IBrp(G)]$ と一般指標環 $Z[Irr(G)]$ を介して，対応する分解行列，射影指標，カルタン行列などの基本的な数学的対象がある。そこで $Z[Irr(G)]$ を経由して $Z[IBrp(G)]$ と $Z[IBrq(G)]$ を結ぶ行列 M でカルタン行列の類似物を新たに導入した。行列 M はクイバーの表現を用いてさらに定式化出来る。具体的な研究成果として M の全ての成分は群 G のシロー p-部分群の位数で割り切れることを証明した。さらに M の固有値とその固有空間を全て決定した。

③ 群論的クイバーの表現の導入：G の部分群全体 $Sgp(G)$ を包含関係と共にポセットと見なし，また付随するクイバーと見なす。ここではクイバー $Sgp(G)$ の表現を考察しその基礎理論を構築したことである。モデルケースは部分群 $H < G$ に対して指標環 $Z[Irr(H)]$ を対応させ，包含関係 $H > K$（矢 $H \to K$）に対して $Z[Irr(H)]$ から $Z[Irr(K)]$ への制限写像を対応させる $Sgp(G)$ の表現である。このモデルケースには次の二つの特殊事情が付随している。一つ目は逆矢 $H \leftarrow K$ に対して誘導写像を対応させることが出来る。二つ目は各指標環 $Z[Irr(H)]$ 上に内積が定義され，制限・誘導・内積に関する相互関係としてフロベニウスの相互律が成立する。この特殊事情を含むモデルケースを次のように一般化した。『F を可換環 R 上のクイバー Q の表現とする。各頂点 a に対して双線形形式 $(\ ,\ )_{a}: F_{a} \times F_{a} \to R$ が定義されていると仮定する。

このとき Q に全ての逆矢を付け加えたクイバー Q^{ud} の表現 F^{ud} がこの形式と共にフロベニウスの相互律の関係式を満たすとき F^{ud} を F から導かれる「群論的クイバーの表現」と呼ぶことにする。』　以上を踏まえてここでは本研究の実績は群論的クイバーの表現の基礎を構築した。特筆すべきアイデアの一つは，自然数 n と部分群 H のペアに対して H 上の方程式 $X^{n} = e$ の解集合 $L_{n}(H)$ に着目し，$L_{n}(H)$ の H-類関数全体からなる C-代数 $cf(L_{n}(H))$ を考察の中心に置いたことである。以上 ①，②，③ の研究結果は数学専門誌 Hokkaido Journal of Mathematics に掲載予定である。

(3)　ベキ零部分群複体のカバーについて：

n を自然数とする。G のベキ零部分群 H で H の指数 $\exp(H)$ が n を割り切るもの全体からなる集合を $N(G,n)$ で表す。これは G 上の方程式 $X^{n} = e$ の解集合 $L_{n}(G)$ を部分群の言葉で解釈したものである。

①　ベキ零部分群に対する $N(G,n)$ と同様に，アーベル部分群に対する $Ab(G,n)$，p-部分群に対する $S_{p}(G,n)$ を定義する。このとき素数 p に対してホモトピー同値性 $N(G,p^{d})\sim S_{p}(G)$，$Ab(G,p^{d})\sim S_{p}(G)$，$Ab(G,p)\sim S_{p}(G,p^{d})$，$Ab(G,p^{d1})\sim S_{p}(G,p^{d2})$ 等を証明した。この結果は $N(G,p)$ が Quillen 予想と密接に繋がっていることを示唆している。

②　ベキ零群の特殊性と $N(G,n)$ の定義から直ちに分かることとして，$N(G,n)$ は $N(C_{G}(x),n)$ のいくつかの和集合で実現される。ここで x は $L_{p}(G)$ の要素，p は $\pi(G)$ の要素を動く。そこで r 個の和集合で $N(G,n)$ が実現されるとき，それを $N(G,n)$ の r-cover と定義する。ここではまず 1-cover であるための必要十分条件は G の最大 $\pi(n)$-正規部分群が非自明であることを証明した。さらに $N(G,n)$ の 2-cover が存在するとき $N(G,n)$ や元の群 G の性質を様々に明らかにしたことである。１．n が素数巾の場合 $N(G,n)$ は複体として常に可縮である。２．n が素数巾 p^{d} の場合 G の シロー p-部分群は非巡回群である。３．G の Fitting 部分群 $F(G)$ と G の最大正規 π-部分群の共通部分は非自明である。４．$N(G,n)$ は連結である。５．$N(G,n)$ のホモロジー群はより低い次元の部分複体のホモロジー群に帰着できることを具体的な表示を用いて示した。以上 ①，② の研究結果は数学専門誌に現在投稿中である。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計4件（うち査読付論文　4件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　4件）

１．著者名 Nobuo Iiyori and Masato Sawabe	４．巻 42
２．論文標題 Quiver representations, group characters, and prime graphs of finite groups	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics	６．最初と最後の頁 497-523
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3836/tjm/1502179297	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Nobuo Iiyori and Masato Sawabe	４．巻 42
２．論文標題 Homology of the complex of all non-trivial nilpotent subgroups of a finite non-solvable group	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics	６．最初と最後の頁 113-120
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3836/tjm/1502179264	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Nobuo Iiyori and Masato Sawabe	４．巻 231
２．論文標題 Partially ordered sets of non-trivial nilpotent π-subgroups II	５．発行年 2017年
３．雑誌名 Topology and its Applications	６．最初と最後の頁 197-218
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.topol.2017.09.011	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Nobuo Iiyori and Masato Sawabe	４．巻 46
２．論文標題 Homology of a certain associative algebra	５．発行年 2017年
３．雑誌名 Hokkaido Mathematical Journal	６．最初と最後の頁 227-256
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.14492/hokmj/1498788019	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計5件（うち招待講演　3件／うち国際学会　0件）

1．発表者名 澤邉正人
2．発表標題 部分群複体とその周辺
3．学会等名 愛媛代数セミナー
4．発表年 2022年

1．発表者名 澤邉正人
2．発表標題 d-covers of posets of nilpotent subgroups
3．学会等名 有限群のコホモロジー論とその周辺（招待講演）
4．発表年 2022年

1．発表者名 飯寄信保　澤邉正人
2．発表標題 Homology of the complex of all non-trivial nilpotent subgroups of a finite non-solvable group
3．学会等名 有限群のコホモロジー論とその周辺（招待講演）
4．発表年 2019年

1．発表者名 飯寄信保　澤邉正人
2．発表標題 Nilpotent π-subgroups and gluing complexes
3．学会等名 代数的組合せ論および有限群・頂点作用素代数とその表現の研究（招待講演）
4．発表年 2017年

1．発表者名 澤邉正人
2．発表標題 ベキ零部分群複体のホモロジーについて
3．学会等名 群論特別セミナー
4．発表年 2017年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関