様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　３年　４月２２日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2017～2020
課題番号：１７Ｋ０５１７０

研究課題名（和文）新しい簡約理論による格子不変量の計算アルゴリズムの研究

研究課題名（英文）A study of an algorithm to calculate lattice invariants by new reduction theory

研究代表者
渡部　隆夫（WATANABE, TAKAO）

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：３０２０１１９８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では、次の成果を得た。一つめは、有理数体上定義された一般線形群について、その算術商の基本領域の境界における０次元セルを決定するために必要となる最小点集合の計算アルゴリズムの開発である。これは、Minkowskiの簡約理論を応用することにより、最小点集合に含まれる行列の成分に対するよい評価を見出し、この評価にもとづいて最小点集合を決定するアルゴリズムを考案した。二つめは、スツルム語に対する反復指数の値集合の中の空隙の確定と最大集積点の決定である。反復指数はBougeaudとKimにより2019年に導入されたばかりの無限語に対して定義される新しい量であり、その性質を他に先駆けて解明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
最小点集合を決定するアルゴリズムができたことで、0次元セルを計算するための道具が一つ整えられたことになる。今回の研究では、最小点集合から0次元セルを決定する方法についても考察したが、多変数の高次連立方程式を解く必要があり、このプロセスの効率的な計算は今後の課題である。スツルム語を規定する基本的なパラメーターの一つである傾きが反復指数にどのように影響するかを部分的に解明したことで、反復指数のとりうる値を限定することができる。反復指数はディオファントス近似論における無理数性指数と関連することがわかっているので、ディオファントス近似論にも応用が見込まれる。

研究成果の概要（英文）：In this study, the following two results were obtained. The first is the development of a calculation algorithm for a set of minimum points required to determine a zero-dimensional cell in the boundary of a fundamental domain of the arithmetic quotient for a general linear group defined over a rational number field. By applying Minkowski's reduction theory, we found a sharp evaluation of the components of matrices contained in a minimum point set, and devised an algorithm to determine the minimum point set based on this evaluation. The second is the determination of a gap and the determination of the maximum accumulate point in the set of values of exponents of repetitons for Sturmian words. The exponent of repetitons for an infinite word is a new quantity just introduced by Bougeaud and Kim in 2019, and our result pioneered its nature.

研究分野：整数論

キーワード：代数群　簡約理論　スツルム語　ディオファントス近似論

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

n 変数正定値２次形式全体のなす対称錐上で、算術的最少と２次形式の被約判別式との比によりHermite 関数が定義される。Hermite 関数の最大値は Hermite 定数とよばれ、その値は n 次元Euclid 空間における単位球の格子最密充填の密度を与える。現時点で、Hermite 定数の値は 8以下の n と n=24 の場合に決定されている。1970 年代の研究で、Ryshkov は対称錐内に現在Ryshkov 多面体とよばれる局所有限凸多面体を定義し、その頂点がいわゆるパーフェクト形式という正定値 2 次形式に対応することを示した。Hermite 関数の極値をとる点はパーフェクト形式になるので、Ryshkov 多面体の頂点集合がわかれば、それから Hermite 定数を決定することができる。この古典的なケースにおいては、Ryshkov 多面体の頂点集合を逐次的に求めるアルゴリズムは原理的に知られており、Voronoi アルゴリズムとよばれる。研究代表者は、2000 年代の研究で代数体上定義された連結簡約代数群に対し、アデール群上で極大放物的部分群に依存する標準的な高さ関数を与え、それから Hermite 関数の一般化として算術的最小関数と代数群に対する一般 Hermite 定数を定義した。その後、2014 年の論文で Ryshkov 多面体の一般化として、アデール群の中で算術的最小関数から定義される領域(Ryshkov 領域)を定め、算術的最小関数の極値をとる点は Ryshkov 領域の境界上になければならないという結果を証明した。また Ryshkov 領域からアデール算術商の基本領域が構成されることも示した。これらの結果は代数群として一般線形群をとり、直線を固定する極大放物的部分群から定義される算術的最小関数をとれば、上述した古典的なケースになる。また直線ではなくより高次元の部分空間を固定する極大放物的部分群から定義される算術的最小関数をとれば、いわゆる Hermite-Rankin 定数に対応するケースになる。しかしながら、臨界点を求めるための Voronoi アルゴリズムに対応する理論は、一般の代数群ではできてなく、一般線形群に限っても Hermite-Rankin ケースではわかっていない。

２．研究の目的

背景の説明で記述したように、Ryshkov 領域の境界上にある算術的最小関数の臨界点を求めるアルゴリズムはまだわかっていない。Ryshkov 領域はアデール群の中の部分集合として定義されるが、基礎体が有理数体などの場合は、アルキメデス素点のところに必要な情報が集約でき、リー群の中の領域(以下, これを便宜的に実 Ryshkov 領域とよぶ)として捉えることができる。実Ryshkov 領域の境界面は有限個の超曲面の交叉から構成されるが、とくに交叉部分の次元が 0になるところを 0-セルとよぶ。0-セルはちょうど Voronoi 多面体の頂点に対応するものと考えられて、臨界点の候補となる点を与える。対象とするリー群の各要素に対応して、最小点集合という旗多様体の有限部分集合が定義される。ここで、旗多様体は対象とする代数群の極大放物的部分群による商空間である。ジェネリックには、最小点集合は 1 点だけからなる集合であるが、群の要素が境界面に含まれるための必要十分条件は最小点集合が 2 点以上からなることである. また、旗多様体の各点は、算術的最小関数によってリー群の中の超曲面を定めるが、リー群の要素の最小点集合は、その要素がどの超曲面に含まるのかを規定する。よって最小点集合の濃度が高いほど、その要素は多くの超曲面の交叉に含まれる。このことから、0-セルを決定することは、濃度の高い最小点集合をもつ群の要素を決定することとほぼ同値である。(ただし、完全に同値な条件なのかはわかっていない.) 群の要素を与えたときに、その最小点集合を求める手続きは自明ではない。この研究の目的は、最小点集合を求めるアルゴリズムの開発、それに続き 0-セル

を決定するアルゴリズムの開発である。

３．研究の方法

有理数体上の一般線形群について研究を進めた。より具体的には、行列のサイズが n の一般線形群の場合，1 以上 n-1 以下の整数 k を一つ固定するごとに、k-算術的最小関数とよばれる一般線形群上の関数が定義される。k=1 の場合は、最小点集合はいわゆる格子の最短ベクトル集合と一致する。最短ベクトルを求めるアルゴリズムは有名な LLL アルゴリズムなどいろいろ知られている。対象としたのは k が 2 以上の場合である。この場合の最小点集合(区別のためこれを k-最小点集合とよぶ)は整数成分の (n,k) 行列である種の最小性条件を満たすものの集合になる。最短ベクトル集合との相違は、k-最小点集合は無限集合であり、サイズが k のユニモジュラー群による右作用の軌道が有限集合になるという点である。そのため、k-最小点集合の決定は、軌道の代表系を求めるということになり、その計算手法の開発と計算のためのプログラムのコーディングなどが必要になる。平成 29 年度にそのためのワークステーションを 1 台購入し、Paython、Pari-GP、Mathematica などの言語で実際にプログラムを書き計算を実行した。また平成 29 年度から令和元年度の期間、 研究代表者と連携研究者は、討議を重ねて各々の計算を進め、関連する雑誌・書籍を購入し、適宜国内で開催される整数論、代数的組み合わせ論など関連分野のセミナー、研究会や数学会の学会に出席し情報交換を行った。令和 2 年度は、COVID19 の影響により対面式のセミナーや研究集会が開催できなくなり、オンラインによる研究会が主流となったので、それに対応するためノート型 PC とカメラ、マイク、スピーカー、ヘッドセットなど必要な機材を購入した。

４．研究成果

（１）k-最小点集合の計算のために、Minkowski の簡約理論を応用することにより、軌道の代表元の成分に対するよい評価を見出し、この評価にもとづいて代表系を決定するアルゴリズムを考案した。実際にプログラムをコーディングして計算を実行したところ、行列のサイズが 8 程度までなら、任意の k でうまく機能することを確認し、8 次元までのパーフェクト形式に対応する群の要素に対する k-最小点集合のリストを作成した。

（２）この研究の主題とは異なるが、当時修士の学生であった大中鈴絵と共同で、Sturm 語の反復指数の研究を行った。Sturm 語の反復指数は 2019 年の論文で Bougeaud と Kim により導入され、その値がディオファントス近似における無理数性指数と直接的な関係があるという定理が与えられた。この結果に興味を持ち、Sturm 語の反復指数がどのような値をとりうるのかということを調べ、反復指数の最大値を M (これは Bugeaud と Kim により具体的に求められていた) とするとき、値 r で開区間 (r,M) の範囲には反復指数の値は存在せず、また値 r 自身は反復指数の値の集積点である、という r を具体的な数値で決定した。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Takao　Watanabe	４．巻 290
２．論文標題 Appendix of "Fundamental domains of arithmetic quotients of reductive groups over number fields" by Lee Tim Weng	５．発行年 2017年
３．雑誌名 Pacific Journal of Mathematics	６．最初と最後の頁 164 - 167
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/pjm.2017.290.139	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計2件（うち招待講演　0件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 大中鈴絵
２．発表標題 Sturmian wordの反復指数とSturmian b進数の超越性
３．学会等名 明治学院大学数論セミナー
４．発表年 2020年

１．発表者名 渡部隆夫
２．発表標題 Sturm語の反復指数の空隙
３．学会等名 日本数学会２０２０年秋季総合分科会
４．発表年 2020年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関