

令和 4 年 5 月 12 日現在

機関番号：17201

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05179

研究課題名(和文) 代数曲線及びアーベル多様体のモジュライ空間の数論幾何とその応用

研究課題名(英文) Arithmetic geometry of the moduli spaces of algebraic curves and abelian varieties, and its applications

研究代表者

市川 尚志 (Ichikawa, Takashi)

佐賀大学・理工学部・教授

研究者番号：20201923

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：高種数テイト曲線上のアーベル微分の明示公式を用いて、代数曲線の族に対して定義されるリーマン・ロッホ同型写像及びマンフォード同型写像の無限積表示を与えると共に、KP階層の準周期解の退化について調べ、準周期解とソリトン解の混合物として表されるKP階層の解を得た。また普遍マンフォード曲線を構成し、その(普遍)アーベル微分と周期積分の明示公式や、代数的対応物である普遍ヤコビ多様体とそのコンパクト化を与えた。さらにこの結果の非可換化として、多重対数関数や多重ゼータ値を用いた普遍マンフォード曲線上の巾単周期の漸近的な明示公式を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数曲線、アーベル多様体のモジュライ空間の数論幾何的研究に新しい知見を与えると共に、弦理論の測度関数、ソリトン方程式、ファインマン積分などの理論物理や数理論理への応用も視野に入れることができた。

研究成果の概要(英文)：Using an explicit formula of abelian differentials on generalized Tate curves, we give infinite product expressions of the Riemann-Roch isomorphism and the Mumford isomorphism defined for families of algebraic curves, and study the degeneration of quasi-periodic solutions of the KP hierarchy with application to its solutions obtained as mixtures of quasi-periodic and soliton solutions. Furthermore, we construct the universal Mumford curve, and show explicit formulas of its (universal) abelian differentials, period integrals and compactified Jacobians. As a nonabelian extension of this result, we give asymptotic explicit formulas of unipotent periods using multiple polylogarithm functions and zeta values.

研究分野：代数曲線とそのモジュライ空間に関する数論幾何的研究と応用

キーワード：代数曲線 アーベル多様体 モジュライ空間 リーマン・ロッホ同型写像 マンフォード曲線 アーベル微分 周期積分 KP階層

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

本研究に関連する主な動向としては

- 1.1. 研究代表者による高種数テイト曲線の構成と、タイヒミュラー保型形式及びタイヒミュラー基本亜群の数論への応用
- 1.2. 研究代表者によるアーベル多様体のモジュライ空間の数論幾何を用いたジーゲル保型形式の研究
- 1.3. Hain, Matsumoto による普遍混合楕円モチーフの理論
- 1.4. Deligne, Goncharov, Brown, Hain 等による、種数が 1 以下の代数曲線における巾単周期の多重対数関数や多重ゼータ値による表示

が挙げられる。これらのテーマは、代数曲線とアーベル多様体及びそれらのモジュライ空間の数論幾何的研究に関するものであり、本研究では、研究代表者の知見を基に上記テーマの更なる発展を目指した。

2. 研究の目的

モジュライ空間とは与えられた対象の同型類を分類する空間で、特に代数曲線とアーベル多様体のモジュライ空間は古くから研究され、数論幾何学、代数幾何学、複素幾何学の重要な研究対象となってきた。上記 1.1, 1.2 で述べた通り、研究代表者は今まで

- ・代数曲線のモジュライ空間の基本亜群であるタイヒミュラー基本亜群の数論幾何的理論及び、ガロア表現論及び共形場理論への応用 (文献: J. Reine Angew. Math. 559 (2003), p.95-114, Comm. Math. Phys. 246 (2004), p.1-18)
- ・アーベル多様体のモジュライ空間の数論幾何的研究に基づく、ベクトル値正則ジーゲル保型形式の代数的理論と p 進ジーゲル保型形式論への応用 (文献: J. Reine Angew. Math. 690 (2014), p.35-49)

を行っていた。これらの結果によって得られた知見に基づく考察を押し進めることにより、本研究においては、高種数テイト曲線の微分形式と周期積分の明示公式や漸近挙動を研究する。さらにその非可換化である巾単周期の理論を構成して、上記 1.3, 1.4 における結果の高種数版としての拡張を目指す。

3. 研究の方法

本研究では

- ・本研究機関における研究代表者の個人研究
- ・本研究機関に所属する研究分担者との共同研究及びセミナー
- ・研究集会やセミナーへの参加、開催などによる学外研究者との研究交流

によって、代数曲線及びアーベル多様体のモジュライ空間の数論幾何的性質を研究すると共に、数学の他分野や理論物理学への応用も目指す。

4. 研究成果

テイト曲線とは、有理整数を係数とする巾級数環上で定義された楕円曲線の族であり、数論幾何のさまざまな分野で応用されている。研究代表者は以前の研究において、テイト曲線の高種数化である「高種数テイト曲線」を構成し、その座標環上での展開を用いて、タイヒミュラー空間上の保型形式「タイヒミュラー保型形式」の性質を調べていた。本研究においては、高種数テイト曲線の理論を代数曲線・アーベル多様体のモジュライ空間の数論幾何的研究に応用し、次の結果を得た。

まず高種数テイト曲線上のアーベル微分として「普遍アーベル微分」の明示公式を導き、その応用として、代数曲線の族に対して定義される(グロタンディーク・ドゥリーニュ・)リーマン・ロッホ同型写像及びマンフォード同型写像の明示的な無限積表示を得た。また今までリーマン面に対し解析的な方法によって得られていたアーベル微分の漸近公式を、数論幾何的な方法を用いてマンフォード曲線を含んだ形で拡張した。この漸近公式を用いて KP 階層の退化に関する研究を進め、準周期解とソリトン解の混合物として表される KP 階層の解の一般的な表示を得た。

次に与えられた種数を持つ任意のマンフォード曲線とショットキー意化されたリーマン面を導く「普遍マンフォード曲線」を、すべての退化データに対応する高種数テイト曲線を糊付

けすることによって構成し、そのアーベル微分と周期積分の明示公式を与えると共に、周期積分の代数的対応物である普遍ヤコビ多様体とそのコンパクト化を構成した。また、このアーベル微分・積分の非可換化として、普遍マンフォード曲線上の巾単周期の理論を構成し、その漸近的な明示公式を、多重対数関数や多重ゼータ値を用いて与えた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件／うち国際共著 1件／うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Takashi Ichikawa	4. 巻 111
2. 論文標題 An explicit formula of the normalized Mumford form	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Letters in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1-13
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11005-020-01339-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Takashi Ichikawa	4. 巻 374
2. 論文標題 Chern-Simons invariant and Deligne-Riemann-Roch isomorphism	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 2987-3005
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/tran/8320	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Toshihiro Shoda	4. 巻 82
2. 論文標題 A reducibility for a triply periodic minimal surface	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 41--55
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Norio Ejiri, Toshihiro Shoda	4. 巻 67
2. 論文標題 Stability of triply periodic minimal surfaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Differential Geometry and its Applications	6. 最初と最後の頁 101555
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takashi Ichikawa	4. 巻 146
2. 論文標題 Klein's formulas and arithmetic of Teichmüller modular forms	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proc. Amer. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 5105--5112
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/14244	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Norio Ejiri, Shoichi Fujimori, Toshihiro Shoda	4. 巻 197
2. 論文標題 On limits of triply periodic minimal surfaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Annali di Matematica Pura ed Applicata	6. 最初と最後の頁 1739--1748
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10231-018-0746-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Miyuki Koiso, Paolo Piccione, Toshihiro Shoda	4. 巻 68
2. 論文標題 On bifurcation and local rigidity of triply periodic minimal surface in R^3	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Annales de l'Institut Fourier	6. 最初と最後の頁 2743--2778
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Norio Ejiri, Shoichi Fujimori, Toshihiro Shoda	4. 巻 35
2. 論文標題 A construction of a two-parameter family of triply periodic minimal surfaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Kobe Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 45--83
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Norio Ejiri, Toshihiro Shoda	4. 巻 58
2. 論文標題 The Morse index of a triply periodic minimal surface	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Differential Geometry and its Applications	6. 最初と最後の頁 177-201
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.difgeo.2018.01.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kentaro Nakamura	4. 巻 5
2. 論文標題 Local epsilon isomorphisms for rank two p-adic representations of $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ and a functional equation of Kato's Euler system	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Cambridge Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 281-368
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/CJM.2017.v5.n3.a1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計9件 (うち招待講演 9件 / うち国際学会 5件)

1. 発表者名 市川尚志
2. 発表標題 Periods of generalized Tate curves
3. 学会等名 リーマン面に関連する位相幾何学 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 庄田 敏宏
2. 発表標題 Laplacian の第一固有値の上限を与える閉曲面上の計量について
3. 学会等名 京都大学数理研研究集会「部分多様体の幾何学の深化と展開」 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kentaro Nakamura
2. 発表標題 Construction of zeta element for rank two universal deformation
3. 学会等名 Iwasawa Theory and Related Topics (University of Heidelberg) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kentaro Nakamura
2. 発表標題 Construction of zeta element for rank two universal deformation
3. 学会等名 Japan-Taiwan Joint Conference on Number Theory 2018 (長崎五島カンパリーホテル) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kentaro Nakamura
2. 発表標題 Construction of zeta element for rank two universal deformation
3. 学会等名 p-adic cohomology and arithmetic geometry (東北大学) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 中村 健太郎
2. 発表標題 Construction of zeta element for rank two universal deformation
3. 学会等名 代数的整数論とその周辺 (RIMS) (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 市川尚志
2. 発表標題 Chern-Simons invariant, Deligne-Riemann-Roch isomorphism and Liouville action
3. 学会等名 リーマン面に関連する位相幾何学 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takashi Ichikawa
2. 発表標題 Ruelle zeta values and the Deligne-Riemann-Roch isomorphism
3. 学会等名 Zeta functions and trace formulas in Fukuoka (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takashi Ichikawa
2. 発表標題 Examples of Teichmueller modular forms
3. 学会等名 Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担者	庄田 敏宏 (Shoda Toshihiro) (10432957)	関西大学・システム理工学部・教授 (34416)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	中村 健太郎 (Nakamura Kentaro) (90595993)	佐賀大学・理工学部・准教授 (17201)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関