

令和 5 年 5 月 22 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2022

課題番号：17K05180

研究課題名(和文) 対称群のスピン表現から広田方程式へ

研究課題名(英文) From spin representations of the symmetric groups to Hirota equations

研究代表者

山田 裕史 (YAMADA, HiroFumi)

岡山大学・自然科学研究科・特命教授

研究者番号：40192794

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：相変わらずKdV方程式系や変形KdV方程式系の広田表示について調べている。佐藤幹夫氏が1980年にこれに関する日本語の論説を書き(数理研究録所収)計算結果を表にしているが、その意味が、最近になってようやく少しわかってきたところである。シュア函数やシュアのQ函数の恒等式が関係している。また対称群の $p=2$ のモジュラー表現論が本質的に関係しているらしい兆候が見られる。ヴィラソロ代数のフォック表現に関して面白い恒等式を見つけたので、青影一哉氏、新川恵理子氏と共著論文を2編書いた。分割の単因子に関して千吉良直紀氏と共著論文を書いた。対称群の表現論の深いところと繋がっているような気配がある。

研究成果の学術的意義や社会的意義

非線型偏微分方程式の一つであるKdV方程式は、ソリトンと呼ばれる特別な解をもつ。自然現象の解明におおいに寄与するが、一方数学的にもその代数性等際立った性質を具備している。私は、佐藤幹夫による無限次元グラスマン多様体の理論を土台にしつつ、組合せ論的な側面に着目して研究を進めている。非線型現象を表す微分方程式が対称群という小さな代数系の組合せ論で制御されている、ということをも明らかにしつつあるという意味で学術的な意義は小さくないと信ずる。

研究成果の概要(英文)：I am studying combinatorial aspects of Hirota bilinear equations for Kdv and modified KdV hierarchies. Mikio Sato wrote a short notes on these objects in Japanese in 1980, and tabulated his experimental results. Only recently I have realized what Sato was thinking and saying. Schur functions and Schur's Q functions are essentially related to the subject. And also modular representations of the symmetric groups at $p=2$ have a deep connection with these hierarchies. I am also investigating certain representation of the Virasoro algebra, which, I think, is related to KdV. Three papers on the reduced Fock representation of the Virasoro algebra appeared which are written jointly with Kazuya Aokage and Eriko Shinkawa. And one more paper with Naoki Chigira will appear, I hope, which is an interesting combinatorics of partitions.

研究分野：表現論

キーワード：シュア函数 対称群 ヴィラソロ代数

1. 研究開始当初の背景

KP 方程式系やそのリダクションである KdV 方程式系については、1980 年頃の佐藤幹夫による無限次元グラスマン多様体の理論により代数的にほぼ完全に理解されたと言って良い。ただ細かい部分に関しては組合せ論的におもしろい材料がまだ残っている。「落穂拾い」になるかもしれないが非線型微分方程式を組合せ論的に捉える、という魅力的な問題意識は共有されているように思われる。

2. 研究の目的

本研究は様々な可積分系の、特に広田表示に注目して、その組合せ論的な構造を表現論的な立場から追求することを目標とする。また対称群、およびそれに関連するヘッケ環などについて、そのスピン表現論、とくにスピンモジュラー表現論を組合せ論的な観点から追求する。対称群やその被覆群の既約指標とも密接に関連するので、常に相関を念頭に置いて調べていく。長期的な視野に立った研究目的である。

3. 研究の方法

KP, 変形 KP 方程式系の広田表示とヴィラソロ代数のフォック表現との関係を見極めること。1985 年頃、脇本實氏との共同研究でヴィラソロ代数のフォック表現の既約分解を調べた。各既約成分の最高ウェイトベクトルとして長方形のヤング図形に付随するシューア函数が登場する。それはそれで非常に特徴的な事実であり、私自身はその後も理解を深めるべく様々なアプローチを考えた。2002 年の池田岳氏との共同研究で満足すべき説明が得られて、ようやく納得した。次に問題にすべきは、フォック表現の「低次の」既約成分から(変形)KP 方程式系の広田表示が登場することである。そもそも広田表示の数が低次既約成分の次元に一致している。これはヴィラソロ代数の指標とプリュッカー関係式の本質的な関係を暗示しているように見えてならない。85 年の共著論文では無限一般線型群(のリー環)にヴィラソロを埋め込む、という形で、広田表示の登場を証明してはいるが、本質的な理解ができていたとは言いがたい。ずっと自分なりの説明を求めており、シューア函数、対称群の表現論など周辺事項をいろいろ調べてきたが、そろそろ機が熟したかな、という感触をもっており、改めて正面突破を目指す。ヴィラソロ代数の指標公式を見直す。もちろん良く知られていることなので「見直す」という作業は研究というよりも勉強と言うべきかもしれない。しかし自分なりの問題意識を持って勉強すれば新たな知見も得られるだろう。プリュッカー関係式がヴィラソロ代数と直接関係する、という見方は今まで指摘されてこなかったと思うので、そこを切り口にして調べていく。

4. 研究成果

まず本課題に関する論文を挙げ、若干の解説を加える。

(1) Reduced Fock representation of the Virasoro algebra, 代数的組合せ論シンポジウム 2018 報告集 38-45

ヴィラソロ代数の被約フォック表現の特異ベクトルを求め、既約表現を完成した。シューア函数ではなくシューアの Q 函数を用いて記述したところがポイントで、対称群のスピン表現との結びつきを示唆している。国際研究集会の報告集所収の論説であり、原著論文ではないが、そのぶん読みやすく書かれている。

(2) Elementary divisors associated with partitions, (with N. Chigira), submitted 2019

整数の分割に付随する単因子について論じたものである。簡単な初等整数論でありながら、分割の、すなわち対称群の表現論の深い部分と結びついているような気配を感じる。KdV の広田方程式を調べている時に気がついたものでもあり、実際に関係がありそうだ。

(3) Pfaffian identities and Virasoro operators, (with K. Aokage and E. Shinkawa), Lett. Math. Phys. 110 (2020), 1381–1389

(4) Virasoro action on the Q-functions, (with K. Aokage and E. Shinkawa), SIGMA 17 (2021), 089, 12pages

ヴィラソロ代数のフォック表現に関連してシュアアの Q 関数への作用を調べたものである。Q 関数はパフィアンで表されるが、その関係式を「微分」した恒等式が成り立つことに着目し、ヴィラソロ代数の作用が見やすくなることを示した。本研究課題でメインの成果と言って良いだろう。

(5) Quantum Sylvester-Franke theorem, (with K. Aokage and S. Tabata), Math. J. Okayama Univ. 64 (2022), 143-151

一般線型群の量子化、すなわち量子群の表現論に関する成果である。有限次元表現の「表現行列」の量子行列式を詳しく調べた。いわゆるシルベスターフランケの定理を量子化したものと位置付けられる。

(6) Differential Pluecker relations, (with K. Aokage and E. Shinkawa), submitted 2023

ヴィラソロ代数のフォック表現に関連してシュアア関数、シュアアの Q 関数の満たす 2 次式を考察した。プリュッカー関係式を微分した形になっており、(多分) 今まで書かれたことがない関係式だと思われる。もちろんシュアア関数は「良い関数」なので様々な関係式を満たすのであるが、今回の恒等式はそれなりに意味深いものだと思じている。ソリトン方程式との関係も見え隠れしている。

以上のようにヴィラソロ代数のフォック表現とシュアア関数等の不変式論の関係については、ほぼ満足すべき形でその本質が明らかになったといえよう。本研究課題の大きな成果とみなせる。無限次元のリー環でよく研究されているのはいるのはカツムーディリー環とよばれるものである。ルート系という、構造や表現を調べる手立てが準備されており、豊かな理論が展開されている。KdV, KP 等のソリトン方程式との関係もカツムーディリー環に関しては 1980 年代に理論がほぼ完成している。一方、ヴィラソロ代数は円周上のベクトル場という幾何学的な背景を持つものとしてあり、カツムーディリー環とは仲が良いのか悪いのか不明な点が多々残されている。円周 $U(1)$ を一般化したユニタリ群 $U(n)$ 上の (左不変ではない) ベクトル場としての表現が N. Wallach によって見つけられているので、それをとっかかりとしてソリトン方程式との関連のさらに詳しい議論をすることが可能であると思われる。佐藤幹夫の理論でソリトンはグラスマン多様体上の力学系であり、ソリトン方程式はプリュッカー関係式に他ならないことが明らかになったが、ヴィラソロ代数の本質的な役割はまだ見通しの良いものとはいえない。今後の課題として挙げておく。もちろんヴィラソロ代数は構造が簡単であるがゆえに、数学のいろいろなところに関与しているはずである。Wallach は「ヴィラソロ代数は不変式論だ」と言い切っている。この言葉の意味を私はまだ十分に咀嚼しているとは言い難いが、このような意識でヴィラソロ代数を研究していきたい。最後は成果報告というより、今後の問題といったものになってしまったが、現時点での私の考えの記録としてここに書いておいた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Kazuya Aokage, Eriko Shinkawa and Hiro-Fumi Yamada	4. 巻 17
2. 論文標題 Virasoro action on the Q-functions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry	6. 最初と最後の頁 12 pages
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 K.Aokage, E.Shinkawa and H.-F.Yamada	4. 巻 110
2. 論文標題 Pfaffian identities and Virasoro operators	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Letters in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1381-1389
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11005-020-01265-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Kazuya Aokage, Eriko Shinkawa and HiroFumi Yamada	4. 巻 Online first
2. 論文標題 Pfaffian identities and Virasoro operators	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Letters in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11005-020-01265-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiroshi Mizukawa and HiroFumi Yamada	4. 巻 47
2. 論文標題 Arithmetic identities for class regular partitions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Hokkaido Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 205-221
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 HiroFumi Yamada	4. 巻 -
2. 論文標題 Reduced Fock representation of the Virasoro algebra	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 代数的組合せ論シンポジウム2018報告集	6. 最初と最後の頁 38-45
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiroshi MIZUKAWA and HiroFumi YAMADA	4. 巻 47
2. 論文標題 Arithmetic identities for class regular partitions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Hokkaido Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 205--221
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Masanori ANDO and HiroFumi YAMADA	4. 巻 47
2. 論文標題 Products of parts in class regular partitions	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Hiroshima Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 15--18
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 西山雄太, 山田裕史
2. 発表標題 KdV方程式系の広田表示
3. 学会等名 日本数学会九州支部例会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 HiroFumi Yamada
2. 発表標題 Reduced Fock representation of the Virasoro algebra
3. 学会等名 Advances and Perspectives in Representation Theory , Qingdao (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 山田裕史
2. 発表標題 Reduced Fock representation of the Virasoro algebra
3. 学会等名 日本数学会九州支部例会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 HiroFumi Yamada
2. 発表標題 Reduced Fock representation of the Virasoro algebra
3. 学会等名 Symposium of Algebraic Combinatorics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 山田裕史
2. 発表標題 ヴィラソロ代数の被約フォック表現
3. 学会等名 福井表現論小研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 HiroFumi YAMADA
2. 発表標題 On Sato's "On Hirota's Bilinear Equations"
3. 学会等名 日中表現論研究会（上海）（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 HiroFumi YAMADA
2. 発表標題 On Sato's "On Hirota's Bilinear Equations"
3. 学会等名 Algebraic and Enumerative Combinatorics in Okayama（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>1. 2022年9月 モンゴル国立大学にて "Differential Pluecker relations" と題するセミナー講演を行った。青影，新川との共同研究に基づくものである。</p> <p>2. 日本評論社の月刊誌「数学セミナー」にて「組合せ論彷徨」と題する12回の連載を行った。本課題（及び以前の研究課題）で得られた結果をも含む専門的な内容を，一般読者にも理解してもらえるように噛み砕いて説明したつもりである。単行本化も予定されている。</p>

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------