

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 3 年 6 月 1 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05189

研究課題名(和文) ホップ代数から見るスーパー群とスーパー幾何学

研究課題名(英文) Super-groups and super-geometry from Hopf-algebraic view-point

研究代表者

増岡 彰 (MASUOKA, AKIRA)

筑波大学・数理解析系・教授

研究者番号：50229366

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：7編の論文を国際学術誌から出版した。そのうち2編は国際共同研究の成果である。また3回の講演を行った。そのうちの1回は国際研究集会における招待講演である。  
スーパー代数群とスーパー・リー群について、ホップ代数のアイデアとテクニックを用いて研究し、基本的な結果を得た。とくに、スーパー代数群  $G$  のスーパー閉部分群  $H$  による商スーパー・スキーム  $G/H$  を具体的に構成し、これが好ましい性質をもつことを証明した。これは、スーパー代数群の表現論に大きく貢献する結果である。また、証明の解析的アナログを辿ることで、スーパー・リー群の等質空間  $G/H$  に関し、新しい結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

スーパー幾何学は、スーパー・ストリング理論のインパクトから再び興味を呼んでいる研究分野ではあるが、一般論が十分整備されているとは言えず、膨大な数の文献の中には信頼できないものも多い。研究代表者は、この状況を打開する目的で、ホップ代数のアイデアとテクニックを応用して、当該一般論を展開する基本的方法を提示した。それは、通常の(非スーパー)コンテキストにおける議論を踏襲・一般化するのではなく、それに帰着させる方法であって、目的はある程度達成できたと思う。

研究成果の概要(英文)：Seven papers were published from international scientific journals, two of which resulted from international joint research. There were presented three lectures, which include one invited lecture at an international conference.  
Obtained were fundamental results on algebraic supergroups and super Lie groups. Hopf-algebraic idea and techniques were applied. Among others, the PI concretely constructed the quotient superscheme  $G/H$  of an algebraic supergroup  $G$  by a closed super-subgroup  $H$ , and showed desirable properties of the superscheme; the result contributes much to representation theory of algebraic supergroups. Pursuing an analytic analogue of the algebraic argument brought some new results on homogeneous superspaces  $G/H$  of super Lie groups.

研究分野：代数学

キーワード：スーパー・ホップ代数 スーパー代数群 スーパー・リー群

### 1. 研究開始当初の背景

ベクトル空間の圏は自明な対称性により、対称テンソル圏を成す。これを一般化して、位数 2 の群で次数づけられたベクトル空間全体は、いわゆるスーパー対称性により対称テンソル圏を成す。この圏を足場とする幾何学が、スーパー幾何学である。

スーパー幾何学は、スーパー・ストリング理論のインパクトから再び興味を呼んでいる研究分野ではあったが、一般論が十分整備されているとは言えず、膨大な数の文献の中には信頼できないものも多かった。研究代表者は約 10 年にわたり、スーパー代数群について、それと同等なスーパー可換ホップ代数を通して研究してきた。その中心となるアイデアは、通常の対象(通常代数群)に帰着させる方法を確立するというものであった。

### 2. 研究の目的

本研究は同じアイデアを以て、スーパー・スキーム、スーパー解析多様体といった、より広い研究対象に取り組むもので、次が目的である。

- (1) スーパー・スキーム  $X$  のスーパー群  $G$  の作用による商  $X/G$  の研究
- (2) 完備体上のスーパー Lie 群の基礎理論の確立
- (3) 微分・差分統一 Galois 理論のスーパー化

### 3. 研究の方法

代数群とは何か? Grothendieck の関手的見地によれば、可換代数の圏上定義され、群の圏に値をもつ表現可能関手がアフィン群であって、そのうち有限型のものが(アフィン)代数群である。従って、代数群は有限生成(可換)ホップ代数と同義になる。この見地は、スーパー代数群の考察においても、極めて有効であって、スーパー代数群、より広くスーパー幾何学の研究に、ホップ代数のアイデアとテクニックが応用できるとする拠り所となった。

本研究ではこれらを実際に応用し、すでに研究対象としてきたスーパー代数群を手本として、より広くスーパー・スキーム、スーパー解析多様体(スーパー Lie 群を含む)を研究した。後者は、任意標数の完備体を基礎体にもつものを対象とするため、通常微分カリキュラスに替え、無限小スーパー・ホップ代数を用いる、純代数的考察を用いた。また、スーパー・リー群の解析的表現に対して、その表現スーパー・ホップ代数(スーパー・ホップ代数で、その余加群が当該表現と対応するもの)を構成し、スーパー・リー群の等質空間の考察に応用した。

研究全体を通しての信条として、通常(非スーパー)コンテキストにおける議論を踏襲・一般化するのではなく、それに帰着させるべきと考え、それを実現する方法を確立した。それは次の 2 つを含む。

- (a) スーパー代数群またはスーパー・リー群が Harish-Chandra 対なるものを以て完全に記述できる(正確には両者の間に圏同値が存在する)ことを示し、前者の考察を後者のそれに置き換える方法。
- (b) スーパー代数が自然なフィルトレーションをもち、従って次数付き代数が付随することに基づき、2 つのスーパー代数の間の同型を与えるのに、付随する次数付き代数の間の標準的同型を引き起こすような、「プレ標準的同型」を与える方法。

### 4. 研究成果

本研究助成期間中に下の 5 項にある 7 編の英文論文を発表した。第  $k$  論文 ( $0 < k < 8$ ) を  $[k]$  と記す。これらの論文すべて査読付き国際学術誌へ掲載されたものであって、とくに  $[4]$ ,  $[6]$  は国際共同研究(共同研究者はロシア・Sobolev 数学研究所所属)の成果である。また研究会において、3 回講演を行った。そのうちの 1 回は国際鍵における招待講演である。

代数群の概念をスーパー対称性のコンテキストにおいて一般化して定義することは容易である。しかし、こうして定義されたスーパー代数群は、通常代数群とかなり異なった性質をもつことが、さまざまな例から知られている。なかでも際立つ性質として、通常代数群と異なるスーパー代数群のうち、線形簡約なもの、すなわちその線形表現が完全可約なものが、本質的に一列に限られることが挙げられる。従ってスーパー代数群の表現論は、ゼロ標数であってもモジュラー表現論の様相を呈す、興味深い研究テーマである。しかしながら最近まで、この表現論は、専ら個々の具体的対象について研究がなされ、一般論の展開が十分でなかった。

本助成を受けてまず一般論として、スーパー代数群が Harish-Chandra 対なるものを以て完全に記述できること、より正確には 2 つのそれぞれが成す圏の間に同値が存在することを証明し、スーパー代数群の具体的構成に応用した ( $[5]$ ,  $[7]$ )。

また、スーパー代数群  $G$  のスーパー閉部分群  $H$  による商スーパー・スキーム  $G/H$  を具体的に構成し、これが好ましい性質をもつことを証明した。これによって、ある種のスーパー代数群の表現に関し知られていた事実が、はるかに広範囲のスーパー代数群に関して成り立つことが明らかになった ( $[1]$ )。

スーパー・リー群は、リー群のスーパー対称性のコンテキストにおける一般化で、その研究の

歴史は、スーパー代数群のそれよりもはるかに長い。にもかかわらず、上記結果の解析的アナログを辿ることで、スーパー・リー群の等質空間  $G/H$  に関し、新しい結果を得ることができた ([3])。

以上で上記目的の(1), (2) がおよそ達成できた。(3)はまだ達成できていないが、これへの準備として、スーパー代数群の可解性とベキ単性に関する基本的結果を得た ([6])。またこれに付随して Krull 次元をスーパー・コンテキストで研究し成果を得た ([4])。加えて arXiv に投稿した、次の2編のプレプリントによって、準備がほぼ整った。

Akira Masuoka, Takuya Oe, Torsors in super-symmetry, arXiv: 2101.03461

Akira Masuoka, Taiki Shibata, Yuta Shimada, Algebraic super-groups with integral, arXiv: 2003.05100

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Akira Masuoka, Yuta Takahashi	4. 巻 26
2. 論文標題 Geometric construction of quotients in super-symmetry	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Transformation Groups	6. 最初と最後の頁 347-375
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00031-020-09583-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Akira Masuoka, Yuta Shimada	4. 巻 7
2. 論文標題 Twisted Forms of differential Lie algebras over $C(t)$ associated with complex simple Lie algebras	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Arnold Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 107-134
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40598-020-00155-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Mitsukazu Hoshi, Akira Masuoka, Yuta Takahashi	4. 巻 562
2. 論文標題 opf-algebraic techniques applied to super Lie groups over a complete field	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 28-93
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.algebra.2020.06.019	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Akira Masuoka, Alexadr Zubkov	4. 巻 224
2. 論文標題 On the notion of Krull super-dimension	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 106245-106274
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jpaa.2019.106245	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Akira Masuoka, Taiki Shibata	4. 巻 503
2. 論文標題 On functor points of affine supergroups	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 534-572
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2018.02.002	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Akira Masuoka, Alexandr N. Zubkov	4. 巻 221
2. 論文標題 Solvability and nilpotency for algebraic supergroups	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Pure and Applied Algebra	6. 最初と最後の頁 339-365
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jpaa.2016.06.012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Akira Masuoka, Taiki Shibata	4. 巻 369
2. 論文標題 Algebraic supergroups and Harish-Chandra pairs over a commutative ring	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 3443-3481
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/tran/6751	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 増岡彰
2. 発表標題 Geometric construction of $G/H$ in supersymmetry
3. 学会等名 第51回環論および表現論シンポジウム
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 増岡彰
2. 発表標題 デサントから見た微・差分ガロア理論
3. 学会等名 Functional Equations and Transcendence (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Akira Masuoka
2. 発表標題 Survey on Hopf crossed products
3. 学会等名 Joint Mathematics Meetings 2018, MAA, AMS (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Akira Masuoka <a href="https://sites.google.com/site/akira298math/home">https://sites.google.com/site/akira298math/home</a>
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Hopf-algebra conference in Tsukuba 2019	開催年 2019年～2019年
---	--------------------

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------