

令和 2 年 7 月 7 日現在

機関番号：32657

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K05227

研究課題名(和文) 広義の正則性をもつ曲面の微分幾何的研究

研究課題名(英文) Differential geometric research of regular surfaces in a wider sense

研究代表者

國分 雅敏 (KOKUBU, Masatoshi)

東京電機大学・工学部・教授

研究者番号：50287439

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：当該年度において、共著論文5編を出版することができた。また、arXiv for math にてプレプリント1編がウェブ公開されている。従来の曲面理論の枠組みから少し一般化されたものである。論文内容は特異点を許容する曲面や空間的曲面と時間的曲面の混合型の曲面に関するものであり、本研究課題の題目にある「広義の正則性」を満たす曲面である。曲面の微分幾何的である平均曲率に着目した研究である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の意義は、これまで研究されてこなかった対象に焦点を当て、いくつかの命題を示すことにより、微分幾何的曲面論における新たな側面を与えたことと言えよう。新たな概念として「広義の正則曲面」を提唱し、広義の正則曲面およびその曲面から生じる幾何構造を研究すること、およびそれらの普遍的な理論の構築を最終目標として始められたものである。最終目標に近づくことができたことで、微分幾何的曲面論における新たな研究分野を与えることができた。

研究成果の概要(英文)：In the academic year 2017--2019, five co-authored papers were published and one pre-print is published on the web (arXiv for math). They give a generalization distinguished from the known theory of surfaces. The contents of the papers are researches on surfaces with singularities and mixed-type surface of spacelike-type and timelike-type. These surfaces belong to the class of 'regular surfaces in a wider sense' of our theme. We studied them paying attention to mean curvature which is a differential geometric invariant.

研究分野：微分幾何学

キーワード：曲面 広義正則曲面 特異点 微分幾何

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

古い文献を調べると、現代よりむしろ 19 世紀から 20 世紀初頭頃の方が特異点をもつ曲面が頻りに扱われていたように思える。例えば、1800 年代の仕事に、特異点付きのガウス曲率一定曲面を見ることができる。特異点付き曲面の微分幾何的研究には空白の時代があるようで、現代的立場から再検証することによる新しい発見が期待された。

一例として、ローレンツ・ミンコフスキー 3 次元空間の平均曲率零曲面を挙げる。これは、正定値・不定値の混合型の誘導計量を持つものの、平均曲率がどの部分でも 0 となっている解析的曲面である。特異点をもつものもあれば無いものもある。本来、正定値計量・不定値計量という親和性が見られない所に、共に平均曲率 0 という共通の現象が見られるのだが、なぜそのような現象が起きるのか、理由は解明されていない状況であった。混合型曲面が研究対象とされ始めたのは近年であり、日本の研究者・研究グループらを中心として活発化されつつある状況にあった。当初、混合型の曲面に関する研究はほとんど見当たらず、理論が構築されつつあるところであり、取り組むべき課題が少なくない状況であった。

また、ドウ・ジッター 3 次元空間の平均曲率一定値 1 曲面となると、更に複雑な現象が見られ、曲面の方程式を解析するのはもっと困難と思われる状況であった。強力な理論の構築が期待される状況にあった。

2. 研究の目的

ある種の特異点を許容する曲面（とくに波面）や型変化を起こす曲面を広義の正則曲面と呼ぶこととし、それらについて、3 次元ユークリッド空間の曲面の場合を手始めに、任意の定曲率空間（不定値計量をもつ空間も含む）の広義の正則曲面およびその曲面から生じる幾何構造を組織的に研究すること、およびそれらの普遍的な理論の構築を目的とした。

外側の空間がローレンツ・ミンコフスキー空間など、不定値計量を持つ場合、一般には曲面の誘導計量は混合型となる。したがって、通常の微分幾何的不変量は、混合の境界を境に不連続となるのが通常である。しかし、連続もしくはもっと強く解析的となる場合がある。つまり、1 階微分の情報では不連続な事象が起きるのだが、2 階以上の微分から決まる不変量は混合の境界を越えて、連続的に矛盾することなく定義されることがある。このような混合型曲面や特異点付き曲面は、正則曲面の次にある研究対象と言えるだろう。

そこで、このような曲面や特異点付き曲面を広義の正則曲面と呼ぶことにし、それらについて微分幾何的性質を明らかにすることを本研究のより具体的な目的とした。また、広義の正則曲面には、それに付随して混合型計量や特異点付き計量、発散を許容する曲率関数といった特異性をもつ幾何構造が生じ、それ自身もまた興味深い対象である。これらへの興味も本研究を遂行しようと思った動機であった。

3. 研究の方法

(1)文献調査・新しい問題解決方法の試み等を日常的な研究活動とした。

(2)連携研究者として参画していただいた梅原雅顕氏、山田光太郎氏とは、平均して年 6 回程度ディスカッションのための会合やセミナーの機会を、東京電機大学東京千住キャンパスもしくは東京工業大学大岡山キャンパスで設けた。梅原雅顕氏・山田光太郎氏と共に研究の進捗（研究テーマに関連する論文・文献等の正確な理解、問題点の指摘、問題解決の報告、新たな問題テーマの指摘等）を報告しお互いに検証、討議した。また、論文の共著者である Wayne Rossman 氏（神戸大学大学院教授）、藤森祥一氏（岡山大学大学院准教授（当時））、川上裕氏（金沢大学大学院准教授）および共著論文執筆予定の S.D. Yang 氏（Korea University 教授）らとの研究成果の検証、研究の方向性確認等のために、彼らの所属機関を訪問し、3 日程度の集中セミナーを年平均 2 回程度行った。

(3)日本数学会年会や総合分科会、幾何学シンポジウムおよび各種研究集会に赴き、新たな知見の獲得、意見交換、情報交換を行った。

(4)本研究課題遂行の一環として、2019 年 8 月 5、6 日研究集会「Submanifold theory in a wider sense」を主催した。本研究集会においても、いくつかの意見交換等を通じ、研究のシード（種）を得ることができた。

4. 研究成果

(1) 2017 年度においては，論文（共著によるもの）の出版 4 編，プレプリントの執筆 1 編，そして研究集会における研究成果の口頭発表を 1 回行った．出版された 4 編の論文の研究対象は，特異点を許容する曲面や空間的曲面と時間的曲面の混合型の曲面であり，本研究課題の題目にある「広義の正則性」を満たす曲面である．曲面の微分幾何的である平均曲率に着目した研究であった．詳細を以下に述べる：

梅原雅顕氏，佐治健太郎氏，山田光太郎氏，ROSSMAN Wayne 氏との共著論文「Addendum: Singularities of flat fronts in hyperbolic space」では，過去に執筆した論文にある命題について，その証明のより詳細な議論を与えることにより，理論をより強固にすることができた．

梅原雅顕氏，藤森祥一氏，山田光太郎氏，Udo Jeromin 氏との共著論文「Quadrics and Scherk towers」では，2 次曲面と Scherk tower と呼ばれる極小曲面，Scherk 型極大曲面と呼ばれる混合型の極大曲面との関連性を明らかにした．ヤコビの楕円関数を介して明示的な関連式を導いた．

梅原雅顕氏，小磯深雪氏，本田淳文氏，山田光太郎氏との共著論文「Mixed type surfaces with bounded mean curvature in 3-dimensional space-times」では，混合型曲面上すべてで定義される関数（混合型曲面上の平均曲率に関連した不変量）を発見した．

梅原雅顕氏，川上裕氏，藤森祥一氏，山田光太郎氏，ROSSMAN Wayne 氏との共著論文「Analytic extension of Jorge-Meeks type maximal surfaces in Lorentz-Minkowski

3-space」では，Jorge-Meeks 型と呼ばれる混合型極大曲面について，その埋め込み性などの幾何的性質を明らかにした．最も基本的な Jorge-Meeks 型の混合型極大曲面は，エンドの数が 3 つである．論文では，より一般に，任意個数のエンドをもつ Jorge-Meeks 型の混合型極大曲面について，すべて埋め込まれた曲面になっていることを証明した．これはユークリッド空間の Jorge-Meeks 曲面とは異なる性質の発見であった．

一方，プレプリントおよび成果発表の内容は次の通りである：ユークリッド空間の曲面およびローレンツ・ミンコフスキー空間における空間的曲面・時間的曲面の，平均曲率とガウス写像による表現式は，それぞれ独立に知られているものであったが，それらの解釈について新たな知見を与え，統一的な表現式を与えた．その内容は arXiv for Math にて公開されている．一方，口頭発表においては得られた統一的な表現式の応用面に重点を置き解説した．平均曲率一定曲面，特異点付きの Gauss 曲率一定曲面の記述が，Jacobi の楕円関数を用いて非常に簡潔な式で与えられることなどに言及した

(2) 2018 年度においては，研究集会における口頭発表を 1 回行った．ユークリッド空間の平均曲率一定曲面，正の Gauss 曲率一定曲面でらせん運動で不変な形状をしているものについて，Jacobi 楕円関数による取り扱いについて解説した．Jacobi 楕円関数を用いることで直接的かつ簡潔な取り扱いが可能であり，円柱に同相ならせん状曲面の，無限個の存在などを容易に示すことができた．

(3) 2019 年度には，共著論文「Analytic extension of exceptional constant mean curvature one catenoids in de Sitter 3-space」を出版することができた．（これは，前年度にはプレプリントとしては完成されていたものである．その意味では (2) の研究成果と言ってもよいであろう．）論文内容の要約を述べる：3 次元ドゥ・ジッター空間におけるカテナイド（種数 0，エンド数 2，平均曲率一定値 1 をもつ空間的曲面）はいくつかのクラスに分類することができるのだが，そのうちのいくつかはドゥ・ジッター空間内の閉集合にはなっていない．これは曲面に誘導される計量が空間的という制約から，曲面をその制約のもとで可能な限り拡張しようとしても光的計量に近づいたとき「壁」のようなものがあり，それ以上拡張されないことに起因する．しかしながら，計量が空間的という制約を外し，曲面の解析性のみ要請する立場をとることとすると，それらの曲面は光的測地線をはさんで解析的拡張をもち，その拡張された曲面はドゥ・ジッター空間内の特異点付き曲面かつ閉集合となっている．不定値の計量をもつ空間内の曲面では，このような現象がしばしば見受けられる．この例は解析的拡張をもつ曲面の代表的なものの一つと考えられ，とても重要な例である．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 Kokubu Masatoshi, Rossman Wayne, Saji Kentaro, Umehara Masaaki, Yamada Kotaro	4. 巻 294
2. 論文標題 Addendum: Singularities of flat fronts in hyperbolic space	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Pacific Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 505 ~ 509
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/pjm.2018.294.505	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Fujimori S., Hertrich-Jeromin U., Kokubu M., Umehara M., Yamada K.	4. 巻 -
2. 論文標題 Quadrics and Scherk towers	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Monatshefte für Mathematik	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00605-017-1075-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Honda Atsufumi, Koiso Miyuki, Kokubu Masatoshi, Umehara Masaaki, Yamada Kotaro	4. 巻 52
2. 論文標題 Mixed type surfaces with bounded mean curvature in 3-dimensional space-times	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Differential Geometry and its Applications	6. 最初と最後の頁 64 ~ 77
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.difgeo.2017.03.009	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Shoichi Fujimori, Yu Kawakami, Masatoshi Kokubu, Wayne Rossman, Masaaki Umehara and Kotaro Yamada	4. 巻 54
2. 論文標題 Analytic extension of Jorge-Meeks type maximal surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 249 ~ 272
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 國分 雅敏
2. 発表標題 R ³ , R ³ ₁ の曲面に関する Kenmotsu 型公式の統一化と応用
3. 学会等名 部分多様体論・湯沢2018（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masatoshi Kokubu
2. 発表標題 Kenmotsu-type formulas -- Unification and Application
3. 学会等名 International Workshop on Differential Geometric Aspects of Integrable Systems（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	梅原 雅頭 (Umehara Masaaki) (90193945)	東京工業大学・情報理工学(系)研究科・教授 (12608)	
連携研究者	山田 光太郎 (Yamada Kotaro) (10221657)	東京工業大学・理工学研究科・教授 (12608)	