

令和 2 年 6 月 15 日現在

機関番号：10103

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K05238

研究課題名(和文) 特異点を許容する曲面論と特異点論の研究

研究課題名(英文) Study on surfaces with singular points and singularity theory

研究代表者

高橋 雅朋 (TAKAHASHI, MASATOMO)

室蘭工業大学・大学院工学研究科・准教授

研究者番号：80431302

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：特異点を許容する曲面論と特異点論の研究として、枠付き曲面と1径数族の枠付き曲線として捉え、関係性の記述や微分幾何学的研究を行いました。

応用として、1径数族の枠付き曲線に関する包絡線、1径数・2径数族の枠付き曲面に関する包絡面、ルジャンドル曲面族に関する包絡面の研究を行い、完全積分可能な1階常微分方程式、1階偏微分方程式系の特異解が完全解に対する包絡線、包絡面となる条件を求めました。

また、ラグランジュ・ルジャンドル特異点論として、パラメータ付きのグラフ型ルジャンドル開折とラグランジュ部分多様体芽の同値関係の関係を記述し、ラグランジュ部分多様体芽の分岐の分類を行いました。

研究成果の学術的意義や社会的意義

特異点を許容する曲線、曲面論の研究は、現在進行形で発展しつつあります。それは、既存の正則では現れない現象や理論の拡張を考察する必要性と様々な不変量や特異点の型の判定等の道具が揃ってきたことによりです。本研究課題では特異点を許容する曲線、曲面として枠付き曲線、枠付き曲面と捉えることによりユークリッド変換の意味で完全不変量を得ることができましたので、微分幾何学的研究を行いました。また、特異点の型や微分方程式の特異解が包絡面となる条件を求めました。

研究成果の概要(英文)：As study on surfaces with singular points and singularity theory, we have studied framed surfaces and one-parameter families of framed curves. We gave relations between framed surfaces and one-parameter families of framed curves. Moreover, we investigated envelopes of one-parameter families of framed curves, one and two-parameter families of framed surfaces and families of Legendre surfaces.

As applications, we gave conditions that singular solutions of completely integrable first order ordinary and partial differential equations are envelopes.

Moreover, we gave a generic classification of bifurcations of Lagrangian submanifold germs by using a relation between equivalence relations of families of Lagrangian submanifold germs and graphlike Legendrian unfoldings.

研究分野：特異点論

キーワード：特異点論 微分幾何学 微分方程式 包絡面 枠付き曲線 枠付き曲面 ルジャンドル特異点論 ラグランジュ特異点論

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

特異点論、特に写像の特異点論は H. Whitney に始まり、J. Milnor、R. Thom、J. Mather 等の研究により多様体の性質や写像の性質を研究するために考察されたものであり、多様体や写像のはめ込み、埋め込み、モース理論、カタストロフ理論、開折理論等は、幾何・トポロジーはもちろんのこと代数や解析における分野とも関わりがあります。特異点論はその汎用性により様々な分野と関わりがあり、特異点論とその応用は期待される分野です。

(1) 特異点を許容する曲面論の構築：正則な曲線論・曲面論は古典的に知られており古くから様々な方々が様々な状況で研究されて来ました。近年、特異点を許容する曲線・曲面の微分幾何学的な研究が盛んにされています。特に、様々な空間系に対するフロント(波面)やフロントルに対して、微分幾何学的性質の研究があります。また、それらの生成的な特異点の判定条件とその応用に関する研究があります。しかし、これらの研究の多くが生成的な特異点あるいは生成的な分岐に現れる特異点を許容した曲面に対しての研究です。生成的な特異点の研究は、初期の研究対象としては非常に重要であり大切なことですが、特異点を直接的に応用するためには、生成的な特異点だけではなく、退化した場合も含む特異点を一般的に扱う必要があります。また、特異点が自然に現れる対象を研究するためには、直接的に特異点を扱う必要があります。申請者(高橋)は、特異点を許容する平面・空間曲線としてルジャンドル曲線・枠付き曲線を導入し、動標構と新たな曲率を用いることで、曲率に対する特異点を許容する曲線の存在と一意性を証明しました。これは正則曲線に対する結果の拡張であり、より一般的な特異点を許容する曲線に対して研究を行うことが可能になりました。実際、枠付き曲線に対して、焦点と縮閉線の定式化を行い、特異点の条件など幾何学的性質を求めました。さらに、この手法を用いることにより、特異点を許容する曲面として枠付き曲面に対して、基本不変量を導入し、基本不変量と枠付き曲面の存在と一意性を証明しました。一方、交差帽子(クロスキャップ特異点)はフロントルにはならず、また枠付き曲面にもなりません、ある種のブローアップを行うと枠付き曲面になることが分かりました。また、新たな観点として、交差帽子を含む特異点を許容する曲面として、1径数族の枠付き曲線の研究を行います。

(2) 特異点論の研究：ラグランジュ・ルジャンドル特異点論は、理論物理との関係もあり現在も研究が盛んにされています。ラグランジュ部分多様体芽に対して、焦点(コースティック)の生成的な分岐の分類は知られていますが、ラグランジュ部分多様体芽の生成的な分岐の分類は分かっていません。そこで、ラグランジュ部分多様体芽の生成的な分岐な分類の研究や一般の1次元高いルジャンドル部分多様体芽とラグランジュ部分多様体芽との関係、またはその拡張に対する研究を行います。また、2次元間の可微分写像の研究を行います。2次元ユークリッド平面間に対しては特異点の生成的な分類や判定法が知られていますが、余次元が高い場合に対してはテイラー展開に対する方法での判定条件となりますので、判定条件に対して不変量を用いて記述する研究を行います。さらに、2次元ユークリッド平面から2次元球面への可微分写像に対して、不変量を考察することで、正則曲面や枠付き曲面のガウス写像の詳しい解析の研究を行います。

2. 研究の目的

新たな特異点論的手法・考察を用いて、特異点を許容する曲面の研究とそのための特異点論の研究を行うことが目的です。特に、生成的な特異点だけではなく、退化した特異点に対しても、より直接的に扱うことが出来る特異点を許容する曲面論の構築を行います。具体的には、特異点を許容する曲面として、枠付き曲面と1径数族の枠付き曲線による定式化を行い、付随する基本量や曲率を導入し、特異点を許容する曲面の性質を明らかにすることが目的です。また、特異点が自然に現れる縮閉面、伸開面、包絡面に対して、枠付き曲面の応用として研究を行います。さらに、特異点論の研究としてラグランジュ・ルジャンドル特異点論の深化と2次元間の可微分写像の特異点論の研究を行い特異点を許容する曲面への応用を行うことが目的です。

(1) 特異点を許容する曲面論の構築：

特異点を許容する曲面として枠付き曲面の研究：3次元ユークリッド空間内の特異点を許容する曲面として、枠付き曲面の理論の構築を行います。特に、新たに導入した基本不変量や曲率の幾何学的意味や新しい性質、曲率が一定の場合や良い性質を持つ曲面の性質の研究を行うことが目的です。正則曲面やフロントとの関連性も調べ、どのような拡張になっているのか、どのような特異点が許容されているのか明らかにします。また、交差帽子は枠付き曲面にはなりません、ブローアップを行うことにより枠付き曲面になることが分かるので、ブローアップの手法と枠付き曲面の研究を行います。さらに、曲面に対して特異点が自然に現れる縮閉面、伸開面、包絡面の定式化を行い、微分幾何学的性質を明らかにすることが目的です。

特異点を許容する曲面として1径数族の枠付き曲線の研究：1径数族の枠付き曲線の理論の構築を行います。特に、1径数族の枠付き曲線に対して、曲率を導入し存在と一意性を示すことが目的です。また、空間曲線に対して線織面や接線曲面の研究がありますので、枠付き曲線に対して、拡張された線織面や接線曲面が枠付き曲面になるための条件やどのような特異点

を許容するかなど、微分幾何学的な性質を明らかにすることが目的です。さらに、交差帽子は1径数族の枠付き曲線となりますので、不変量を用いることで今まで知られている交差帽子の性質との関係や新たな性質を明らかにすることが目的です。

(2) 特異点論の研究：

ラグランジュ・ルジャンドル特異点論の深化：1次元高いルジャンドル部分多様体芽とラグランジュ部分多様体芽との関係を記述することが目的です。特に、ラグランジュ部分多様体芽の分岐の生成的な分類を行うことが目的です。また、1次元高いルジャンドル部分多様体芽に対して、焦面、マクスエル集合、包絡面を保存する同値関係はラグランジュ部分多様体芽に対してどのような同値関係に対応するのか明らかにすることが目的です。さらに、その応用として、枠付き曲線族や枠付き曲面族に対するルジャンドル部分多様体芽とラグランジュ部分多様体芽の関係を調べ、特異点を許容する曲線・曲面論に応用することが目的です。

2次元間の可微分写像の特異点論の研究：ユークリッド平面間の可微分写像の理論の構築を行います。特に、新たな不変量を導入し不変量における写像の存在と一意性を証明することが目的です。また、余次元が高い特異点の判定法に対して、不変量を用いて条件を記述することが目的です。さらに、ユークリッド平面から2次元球面に対しても不変量を導入し、写像の特異点を詳細に研究することが目的です。その応用として、正則曲面のガウス写像が退化した余次元が高い特異点を持つ場合に対して微分幾何学的な性質を明らかにすることが目的です。また、枠付き曲面のガウス写像に対しても微分幾何学的な性質を明らかにすることが目的です。

3. 研究の方法

(1) 特異点を許容する曲面論の構築：

特異点を許容する曲面として枠付き曲面の研究：特異点を許容する曲面として、枠付き曲面に対して導入した基本不変量と曲率を用いることで理論の構築を行います。特に、これらの基本不変量と曲率の合同や微分同相における新たな不変量を曲面論を参考に求めます。また、交差帽子は枠付き曲面ではありませんが、ブローアップを行うことにより枠付き曲面になります。ブローアップの手法は代数多様体や複素多様体で用いられる手法ですので、これらの理論を参考に、ブローアップした時、枠付き曲面になる条件や対応する同値関係の研究を行います。さらに、枠付き曲面に対して縮閉面、伸開面、包絡面を正則曲面の場合の拡張として定義を行い、基本不変量、曲率を具体的に与えることで微分幾何学的な性質を調べます。縮閉面、伸開面、包絡面は関数族や可微分写像の判別集合や分岐集合により与えられますので、可微分写像の特異点論を用いて定式化を行い研究を推進します。枠付き曲面は、余次元が1の特異点だけでなく余次元が2の退化した特異点も含む理論ですが、うまくいかない場合は、フロントの場合や余次元が1の特異点を許容する曲面の場合を参考に研究を推進します。

特異点を許容する曲面として1径数族の枠付き曲線の研究：枠付き曲線の研究と1径数族のルジャンドル曲線と包絡線の研究は行っていますので、これらの理論を参考に1径数族の枠付き曲線に対して、曲率を導入し存在と一意性を証明します。一般には1径数族の枠付き曲線は枠付き曲面とはなりません、枠付き曲面となるための必要十分条件を求め、との関係の研究を行います。また、交差帽子は1径数族の枠付き曲線ですので、交差帽子の性質を導入した曲率を用いて関連性を考慮し、新たな性質や不変量の研究を行います。さらに、線織面や接線曲面は1径数族の枠付き曲線の具体例となっていますので、枠付き曲線に対して拡張された線織面や接線曲面が枠付き曲面になるための条件や特異点の判定法を用いることにより、どのような特異点を許容するのか微分幾何学的な性質の研究を行います。特に、一般的に接線曲面はフロントルですので、枠付き曲線の曲率と枠付き曲面の基本不変量の間を用いることにより研究を行います。

(2) 特異点論の研究：

ラグランジュ・ルジャンドル特異点論の深化：ラグランジュ部分多様体芽とルジャンドル部分多様体芽の関係性をそれぞれの母関数族を用いることにより研究を行います。グラフ型ルジャンドル開折は1次元高いルジャンドル部分多様体の特別な場合であり、ラグランジュ部分多様体芽とグラフ型ルジャンドル開折芽に対する同値関係が必要十分であることが証明されました。この結果を応用することにより、1径数族のラグランジュ部分多様体芽に対して、1径数族のグラフ型ルジャンドル開折芽の同値関係が必要十分であることを証明し、ラグランジュ部分多様体芽の分岐の生成的な分類を行います。また、1次元高いルジャンドル部分多様体芽の母関数族とラグランジュ部分多様体芽の母関数族の関係を明らかにし同値関係や何が保存されているのか研究を行います。さらに、1次元高いルジャンドル部分多様体芽は1径数族のフロントを与えていますので、この理論を拡張することにより、1径数族のルジャンドル曲線、1径数族の枠付き曲線、1径数族の枠付き曲面への応用の研究を行います。

2次元間の可微分写像の特異点論の研究：枠付き曲線、枠付き曲面の手法を用いて、2次元間の可微分写像の特異点論の研究を行います。特に、ユークリッド平面間の可微分写像として、1径数族のルジャンドル曲線はユークリッド平面間の可微分写像に対応しますので、曲率を用いて平面写像の特異点の判定条件の研究を行います。また、球面への写像として1径数族の球面ルジャンドル曲線を用いることにより、曲率の定義を行い球面への写像の研究を行います。

す。さらに、応用として正則曲面に対してガウス写像が退化した特異点を持つ場合に曲率を用いることにより研究を行います。枠付き曲面に対するガウス写像に対しても基本不変量と曲率を用いることにより研究を行います。

4. 研究成果

(1) 特異点を許容する曲面論の構築：

枠付き曲面と1径数族の枠付き曲線の関係性の研究を行い、それぞれの場合に対して、基本不変量に対する条件を与えました。また、具体例として満たさない例を見つけ、2つの考え方が必要であることが分かりました。

特異点を許容する回転面の研究を行いました。特に、ルジャンドル曲線を軸に沿って回転させることで枠付き曲面になることが分かりました。ルジャンドル曲線の曲率を用いて特異点の判定や、枠付き曲面の基本不変量を用いて回転面がガウス曲率一定と平均曲率一定の場合の表示を求めました。

1係数族の枠付き曲線の包絡面の理論を作りました。また、球面、双曲空間、ド・シッター空間内の1係数族のルジャンドル曲線に対して、包絡線の理論を作り、性質の研究を行いました。さらに、一般次元のルジャンドル曲面族に対して、包絡面の理論を作り、1階偏微分方程式の特異解が包絡面となる条件を求めました。より具体的に1径数族と2径数族の枠付き曲面に対して包絡面の理論を用いることにより、1階偏微分方程式系の特異解が包絡面となる条件を求めました。

正則曲面上のルジャンドル曲線に対する可展面の研究を行いました。正則曲面上の正則曲線の可展面の研究はすでに行われていましたので、この理論を拡張し、新たに現れる特異点があることが分かりました。

枠付き曲線の縮閉線と焦面の研究を行いました。ルジャンドル曲線に対する縮閉線は円による2次近似ですが、枠付き曲線に対する球面における3次近似の理論に対応します。縮閉線を定式化し、縮閉線と焦面の特異点の型の判定や性質を調べました。また、枠付き曲線と円による方向と2次近似による縮閉線の研究も行いました。

枠付き曲線に対するベルトラン曲線とマンハイム曲線の定式化を行い、存在する必要十分条件を与えました。正則空間曲線の場合には古典的に知られていますが、多くの本や論文では非退化条件を暗に仮定しており、定理としては間違っていますので、その指摘と修正も行いました。

(2) 特異点論の研究：

一般のラグランジュ部分多様体族とグラフ型ルジャンドル開折族の同値関係の記述を行いました。対応する同値関係を用いることによりラグランジュ部分多様体芽の分岐の生成的な分類をグラフ型ルジャンドル開折族の分岐の生成的な分類に帰着することで求めました。

写像芽の同値関係の研究として、幾何学的同値関係を定式化し、様々な同値関係を総合的に考察することができ、性質を調べました。また、ある種の幾何学的同値関係に対する余次元が低い場合の分類を行いました。この研究は、量子化学や物性化学とトポロジーへの応用があることが知られており、今後発展する可能性があります。

1係数族のルジャンドル曲線の理論を用いることにより2次元から2次元間の写像の研究を行いました。特に、今まで区別することが難しい曲線族に対して、ルジャンドル曲線族の曲率を用いることにより区別することができることが分かりました。また、直線族に対してより詳しく特異点の型の情報をルジャンドル曲線族の曲率を用いることにより与えました。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計14件（うち査読付論文 14件 / うち国際共著 4件 / うちオープンアクセス 14件）

1. 著者名 Chen L., Pei D. H., Takahashi M.	4. 巻 293
2. 論文標題 Dualities and envelopes of one parameter families of frontals in hyperbolic and de Sitter 2 spaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematische Nachrichten	6. 最初と最後の頁 893 ~ 909
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1002/mana.201800316	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Izumiya Shyuichi, Takahashi Masatomo	4. 巻 21
2. 論文標題 On families of Lagrangian submanifolds	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Singularities	6. 最初と最後の頁 188 ~ 207
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5427/jsing.2020.21j	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Fukunaga Tomonori, Takahashi Masatomo	4. 巻 21
2. 論文標題 Framed surfaces and one-parameter families of framed curves in Euclidean 3-space	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Singularities	6. 最初と最後の頁 50 ~ 69
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5427/jsing.2020.21c	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Takahashi Masatomo, Teramoto Keisuke	4. 巻 -
2. 論文標題 Surfaces of Revolution of Frontals in the Euclidean Space	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00574-019-00180-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Pei Donghe, Takahashi Masatomo, Yu Haiou	4. 巻 110
2. 論文標題 Envelopes of one-parameter families of framed curves in the Euclidean space	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Geometry	6. 最初と最後の頁 1~31
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00022-019-0503-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Honda Shun'ichi, Izumiya Shyuichi, Takahashi Masatomo	4. 巻 110
2. 論文標題 Developable surfaces along frontal curves on embedded surfaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Geometry	6. 最初と最後の頁 1~20
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00022-019-0485-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Fukunaga Tomonori, Takahashi Masatomo	4. 巻 50
2. 論文標題 Framed Surfaces in the Euclidean Space	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series	6. 最初と最後の頁 37~65
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00574-018-0090-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Izumiya S., Fuster M. C. Romero, Takahashi M.	4. 巻 78
2. 論文標題 Evolutes of curves in the Lorentz-Minkowski plane	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 313~330
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/aspm/07810313	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Takahashi Masatomo	4. 巻 473
2. 論文標題 Envelopes of families of Legendre mappings in the unit tangent bundle over the Euclidean space	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 408 ~ 420
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2018.12.057	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Honda Shun'ichi、Takahashi Masatomo	4. 巻 150
2. 論文標題 Evolutes and focal surfaces of framed immersions in the Euclidean space	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics	6. 最初と最後の頁 497 ~ 516
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/prm.2018.84	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Izumiya Shyuichi、Takahashi Masatomo、Teramoto Hiroshi	4. 巻 25
2. 論文標題 Geometric equivalence among smooth map germs	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Methods and Applications of Analysis	6. 最初と最後の頁 337 ~ 362
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/MAA.2018.v25.n4.a5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Li Yanlin、Pei Donghe、Takahashi Masatomo、Yu Haiou	4. 巻 69
2. 論文標題 Envelopes of legendre curves in the unit spherical bundle over the unit sphere	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 The Quarterly Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 631 ~ 653
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/qmath/hax056	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Fukunaga Tomonori、Takahashi Masatomo	4. 巻 108
2. 論文標題 Existence conditions of framed curves for smooth curves	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Geometry	6. 最初と最後の頁 763 ~ 774
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00022-017-0371-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Takahashi Masatomo	4. 巻 71
2. 論文標題 Envelopes of Legendre Curves in the Unit Tangent Bundle over the Euclidean Plane	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Results in Mathematics	6. 最初と最後の頁 1473 ~ 1489
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00025-016-0619-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計9件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 Masatomo Takahashi
2. 発表標題 Envelopes of families of framed surfaces and singular solutions of first order partial differential equations
3. 学会等名 6th International Workshop on Singularities in Generic Geometry and its Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masatomo Takahashi
2. 発表標題 Singularities of envelopes for first order differential equations of Clairaut type
3. 学会等名 Singularity Theory and its Applications in Differential Equations and Differential Geometry (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 高橋雅朋
2. 発表標題 1階クレロー型方程式の特異解の特異点について
3. 学会等名 室蘭研究会2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 高橋雅朋
2. 発表標題 Bertrand and Mannheim curves of framed curves in the 3-dimensional Euclidean space
3. 学会等名 特異点論による空間研究
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masatomo Takahashi
2. 発表標題 Envelopes of families of Legendre mappings in the unit tangent bundle over the Euclidean space
3. 学会等名 15th International Workshop on Real and Complex Singularities (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 高橋雅朋
2. 発表標題 アファイン曲線論再考
3. 学会等名 幾何学と特異点 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masatomo Takahashi
2. 発表標題 Framed surfaces: smooth surfaces with singular points
3. 学会等名 Singularities and Differential Geometry in Changchun 2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 高橋雅朋
2. 発表標題 ルジャンドル写像族に対する包絡面とその応用
3. 学会等名 日本数学会北海道支部講演会 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 高橋雅朋
2. 発表標題 ラグランジュ部分多様体とグラフ型ルジャンドル部分多様体
3. 学会等名 第64回トポロジーシンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

数学-Mathematics-
<http://www3.muroran-it.ac.jp/masatomo/math.html>
 室蘭工業大学 研究者データベース
http://rdsoran.muroran-it.ac.jp/html/100000191_ja.html

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----