

令和 2 年 5 月 29 日現在

機関番号：13301  
研究種目：基盤研究(C)（一般）  
研究期間：2017～2019  
課題番号：17K05246  
研究課題名（和文）アレクサンダー多項式の応用

研究課題名（英文）Applications of Alexander polynomial

## 研究代表者

門上 晃久（Kadokami, Teruhisa）

金沢大学・機械工学系・教授

研究者番号：80382026

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：アレクサンダー多項式は結び目に対する古典的な多項式不変量であるが、結び目理論・低次元トポロジーでは常に重要な位置にある。アレクサンダー多項式は、3次元多様体の不変量の1つである Reidemeister torsion と手術公式を通じて深い関係にあることから、レンズ空間やザイフェルト多様体の Reidemeister torsion の値を、円分体の数論も用いて研究を続け、成果を得た。

## 研究成果の学術的意義や社会的意義

アレクサンダー多項式は学術的に様々な方面に応用できる。私が研究で行った主な応用は、手術理論、絡み目の対称性問題、結び目理論と数論の関連性の理論である。特に数論との関連性からわかるように、今後も他分野との関わりを広げられる可能性を秘めていると確信する。

研究成果の概要（英文）：The Alexander polynomial is the most classical polynomial invariant for knots, which is always important in Knot Theory and Low dimensional Topology. From the fact that the Alexander polynomial is deeply related with the Reidemeister torsion, which is an invariant for 3-dimensional manifolds, via surgery formula, I have studied the value of the Reidemeister torsion of lens spaces and Seifert manifolds by using the facts from cyclotomic field theory.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：結び目 アレクサンダー多項式 Reidemeister torsion デーン手術 もろ手性 結び目と数論

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

アレクサンダー多項式は 1923 年 J.Alexander により定義された、結び目に対する多項式不変量である。1935 年に K.Reidemeister は独自の不変量を定義し、レンズ空間の分類に応用した。この不変量は Reidemeister torsion と呼ばれている。R.Fox は 1953 年以来、アレクサンダー多項式の理論の基礎付けを精力的に行った。その結果、被覆空間を通じて理解できることが明らかになった。1962 年 J.Milnor は、アレクサンダー多項式は Reidemeister torsion の特別な場合であることを示した。1973 年に B.Mazur は代数的数論とアレクサンダー多項式の理論の類似を指摘した。代数拡大の岩澤多項式を導く様子が、被覆空間からアレクサンダー多項式を導くことに対応する。1986 年に V.Turaev は 3 次元多様体に対する Reidemeister torsion を研究し、この不変量がアレクサンダー多項式を通じて計算される手術公式を示した。2009 年頃森下昌紀により、素数と結び目の対応を強く意識する、B.Mazur の流れを汲む研究が精力的になされた。結び目理論にとっては、他分野との関連を広げていく契機になった。私は Reidemeister torsion の値が円分体に数値を取ることからも、結び目理論と代数的数論との関係性があることに気づき、いくつかの結果を得た。

仮想結び目は 1996 年に L.Kauffman により創始された理論で、結び目の任意のガウスコードの実現化として扱うことを目的としている。従来の結び目理論で発展してきている多項式不変量の理論が精力的に導入された。従来の結び目は 3 次元球面内にある円周が幾何学的実体である。一方、仮想結び目は種数付き閉曲面と閉区間の積空間内で実現される。この幾何学的な観点は 2000 年代初 S.Carter-S.Kamada-M.Saito や G.Kuperberg により明確な形で示されている。2008 年に私はこの幾何学的観点を 2 系仮想絡み目の分類に応用した。

### 2. 研究の目的

アレクサンダー理論の様々な応用が目的である。デー手術や絡み目の対称性等への幾何的な応用と、代数拡大の理論とアレクサンダー多項式理論との類似を模索するような理論上の応用が主な研究対象である。非可換代数は情報量が豊かである一方で扱い辛い面がある。一方可換代数は機動力に優れる長所がある。可換加群から来る古典的なアレクサンダー多項式の応用を徹底的に調べ尽くすことで、非可換加群から来るねじれアレクサンダー多項式やヘガードフレアホモロジーの応用へのよい道筋を作ることが目的である。その他の研究として、仮想絡み目 (virtual link) の理論の幾何学的観点の発展がある。

### 3. 研究の方法

V. Turaev ("Reidemeister torsion in knot theory", Russian Math. Surveys 41-1, 119-182 (1986)) における Reidemeister torsion の計算方法を主な手法とした。3 次元多様体  $M$  の、絡み目  $L$  に沿う手術表示があるとき、 $M$  の Reidemeister torsion は  $L$  のアレクサンダー多項式より手術公式を用いて計算される。その値は、円分体や多項式環やそれらのテンソル積の商体を取る。代数的手法としては、可換環論からは中国剰余定理、代数体論からは円分体とその整数環の理論をよく用いた。

アレクサンダー多項式の応用の内容は、(1) デー手術、(2) 絡み目の対称性、(3) 代数拡大の理論とアレクサンダー多項式理論との類似、である。その他の研究内容は、(4) 仮想絡み目 (virtual link) がある。

### 4. 研究成果

想定していた研究まで届かなかった面があったが、論文は

T.Kadokami, N.Maruyama, T.Sakai, Seifert surgery on knots via Reidemeister torsion and Casson-Walker invariant III, Topology and Its Applications 241 (2018), 78-81

を発表した。主定理を説明する。ホモロジー球面内の結び目  $K$  で  $2/q$ -手術した 3 次元多様体を  $M$  とし、その普遍被覆空間 (2 重被覆空間) を  $X$  とする。第一の主定理は「 $X$  の 1 次元ホモロジー群が有限巡回群で、 $M$  が 3 本以上の特異ファイバーを持つザイフェルト多様体のとき、 $M$  が 4 本以上の特異ファイバーを持つのは、 $X$  の普遍被覆空間の 1 次元ホモロジー群の位数が無限になること」である。第二の主定理は「 $K$  に対して、3 次元球面内の八の字結び目に近い仮定をして、さらに  $q$  が 3 以上で、 $X$  の普遍被覆空間の 1 次元ホモロジー群の位数にある種の不等式を仮定するとき、 $M$  はザイフェルト多様体ではない」である。対偶を取ると、 $M$  がザイフェルト多様体のとき  $q=1$  (整数性) であることを言っている。証明手法は、Reidemeister torsion の計算結果とザイフェルト多様体の特異ファイバーの係数の関係を詳細に評価することで結果を得る。

また、仮想結び目理論の幾何的な観点の研究として、3次元多様体内の結び目理論を、仮想結び目を通じて解釈することを提唱した。いずれも、今後も続けて発展させるべき内容である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Teruhisa Kadokami, Noriko Maruyama, Tsuyoshi Sakai	4. 巻 241
2. 論文標題 Seifert surgery on knots via Reidemeister torsion and Casson-Walker invariant III	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 78-81
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） <a href="https://doi.org/10.1016/j.topol.2018.03.034">https://doi.org/10.1016/j.topol.2018.03.034</a>	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 門上晃久
2. 発表標題 ブレイド群と暗号
3. 学会等名 金沢大学暗号理論勉強会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 門上晃久
2. 発表標題 Geometric study of virtual knot theory
3. 学会等名 拡大K00Kセミナー2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Teruhisa Kadokami
2. 発表標題 Knot theory in 3-manifold via virtual knot theory
3. 学会等名 Knots in Tsushima 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 門上晃久
2. 発表標題 Reidemeister torsion の利用法1,2
3. 学会等名 低次元トポロジー勉強会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 門上晃久
2. 発表標題 Knot theory in 3-manifold via virtual knot theory
3. 学会等名 結び目の数理II
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

主催した研究集会：2017年、2018年、2019年金沢大学暗号理論勉強会、2019年Geometry&Topology Symposium in Kanazawa（2020年も予定していたが、新型コロナウイルスの影響で中止された）、2019年北陸結び目セミナー、2019年低次元トポロジー勉強会、2019年シンポジウム暗号数理の現状と未来。

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考