

令和 5 年 6 月 26 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2022

課題番号：17K05252

研究課題名(和文) チャーン・サイモンズ摂動理論の研究と位相幾何学への応用

研究課題名(英文) Chern-Simons perturbation theory and its application to topology

研究代表者

渡邊 忠之 (Watanabe, Tadayuki)

京都大学・理学研究科・准教授

研究者番号：70467447

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円

研究成果の概要(和文)：Kontsevichは配置空間上の積分によって3次元多様体やホモロジー円板の族に対する微分位相不変量を数学的に構成した。本研究では、Kontsevichの不変量とそのトポロジーへの応用について研究し、以下の結果が得られた。(1) 配置空間積分を用いて、4次元円板の相対微分同相の群が可縮でないことを示した。(2) 配置空間積分を、ある種の閉4次元多様体上の非自明な局所系に対して拡張した。それを用いてそれらの閉4次元多様体の写像類群の非自明な元を多数見つけた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

4次元円板の相対微分同相の群のトポロジーは、多様体の局所構造に関するカテゴリーの差の根本に関わる基本的な研究対象であるが、その具体的な構造についてはほとんど何もわかっていない状態であった。そのホモトピー型が全く自明でないということを初めて明らかにしたことは学術的意義があると考えられる。

研究成果の概要(英文)：Kontsevich constructed differential topological invariants of 3-manifolds and families of homology disks by configuration space integrals. We studied Kontsevich's invariants and their applications to topology, and obtained the following results.

(1) We proved that the group of relative diffeomorphisms of the 4-dimensional disk is not contractible, by using Kontsevich's configuration space integral invariant.

(2) We extended Kontsevich's configuration space integral invariant to some closed 4-manifolds equipped with non-trivial local coefficient systems. By using the extension, we found many non-trivial elements of the mapping class groups of some closed 4-manifolds.

研究分野：位相幾何学

キーワード：微分同相群 配置空間 グラフホモロジー 4次元多様体 有限型不変量 Morse理論 ホモトピー群
可微分多様体

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

配置空間積分：

Witten は経路積分と呼ばれる物理的な方法によって、無数に存在する 3 次元多様体の位相不変量を統一的に解釈する枠組みを提唱した。Axelrod, Singer, Kontsevich はこれに対して、摂動展開と呼ばれる考え方にに基づき、数学的に定義可能な 3 次元多様体の位相不変量を抽出した (Chern-Simons 摂動理論)。その不変量は多様体の配置空間上の積分という、微分位相幾何学の言葉で記述可能なものであり、「Witten の経路積分が捉える情報はどのようなものか」という基本的な問いに対して、純粋に幾何学の枠組みでアプローチできる可能性が示唆された。実際、ホモロジーが 3 次元球面のそれと同型である 3 次元多様体 (整ホモロジー 3 球面) に対しては、Kuperberg, D. Thurston, Lescop の仕事があり、Kontsevich の配置空間積分は大槻知忠の有限型不変量に対するフィルトレーション (絡み目の手術で定義される) の次数商の構造を有理数係数の場合に完全に検出することが知られている。配置空間積分のこの性質は、有限型不変量に対する普遍性とよばれ、このような性質を持つ不変量は、それ以前に Le-村上順-大槻や Bar-Natan-Garoufalidis-Rozansky-Thurston によって、全く異なる組合せ的な方法を用いて得られていた (LMO 不変量)。

局所系係数に対する類似：

ホモロジー球面とは限らない 3 次元多様体に対しては、Kontsevich の配置空間積分を局所系係数の微分形式に拡張して考えるのが自然であることが、Axelrod, Singer, Kontsevich の論文で示唆され、ある特別な局所系の場合に実際に Bott, Cattaneo, 深谷賢治, Marche, Lescop によって位相幾何学の枠組みで定式化されていた。特に Lescop の定式化は、結び目補空間の「Z 同変」有限型不変量を念頭に置いていた。同様の局所系係数に対する類似によって、1 次ベッチ数が正の、境界を持たない 3 次元多様体に対しても普遍有限型不変量が得られるだろうという漠然とした期待があった。Reshetikhin-Turaev 不変量に基づく摂動的な不変量の、1 次ベッチ数が 1 の閉 3 次元多様体に対する refinement は大槻知忠によって得られており、Lescop の不変量はその結果の後に出たものであった。

2. 研究の目的

結び目補空間に対しては、LMO 不変量のループ展開が既にあり (Rozansky, Garoufalidis, Kriker) それを用いることで結び目補空間の Z 同変有限型不変量の構造もかなり調べられていた。結び目の補空間であるような 3 次元多様体はやや特殊であり、すべての 3 次元多様体まで理論を広げようとするなら境界を持たない 3 次元多様体を次の対象にすることは必然である。閉 3 次元多様体では、整ホモロジー 3 球面に対しては、(同変版でない) 元の LMO 不変量がすでに普遍有限型不変量になっていることが知られていた

(Bar-Natan-Garoufalidis-Rozansky-Thurston) が、1 次ベッチ数が正の閉 3 次元多様体に対して、LMO 不変量は Casson-Walker-Lescop 不変量や古典的な不変量の情報しか持たないことが知られていた。

本研究では、1 次ベッチ数が正の、境界を持たない 3 次元多様体に対して、配置空間積分の局所系係数に対する類似を構成し、有限型不変量との関係を明確にすること、及びその不変量を低次元トポロジーの問題に応用することを目指した。

3. 研究の方法

本研究では、深谷賢治による Morse ホモトピー理論を用いた摂動的な不変量の構成法を、Morse-Novikov 理論に拡張することにより、強力な不変量を得ることを試みた。Morse ホモトピー理論は、Morse 関数の勾配的ベクトル場の有限個の組に対して、各辺が積分曲線であるようなグラフの入り方を数えるものであり、Morse-Novikov 理論では、closed 1-form の勾配的ベクトル場の積分曲線を積み付きで数える。これらを組み合わせて得られると期待される不変量の well-definedness のためには、値の有限性が問題となるが、研究代表者は、勾配的ベクトル場に対する Pajitnov 変形のある種の極限を考えることにより有限な情報にまとめられることを本研究課題以前に観察しており、それが利用できないかと考えた。

4. 研究成果

本研究では、途中で当初の計画を修正し、配置空間積分を 4 次元多様体の微分同相群のホモトピー群の研究に応用することを目指すこととなった。その経緯については下の方で述べる。

(1) Kontsevich の配置空間積分は、4 次元以上では枠付きホモロジー円板をファイバーとするファイバー束の不変量を与える。本研究では、Kontsevich の配置空間積分を用いて、4 次元円板の相対微分同相の群 $\text{Diff}(D^4, \cdot)$ が可縮でないことを示した。これは Smale 予想の 4 次元版

に対する否定的解決を与える。またこれをきっかけとして、Boris Botvinnik 氏とのコンコーディダンスに関する共同研究が始まった。

Tadayuki Watanabe,
Some exotic nontrivial elements of the rational homotopy groups of $\text{Diff}(S^4)$,
arXiv:1812.02448.

Tadayuki Watanabe,
Addendum to: Some exotic nontrivial elements of the rational homotopy groups of
 $\text{Diff}(S^4)$ (homological interpretation),
arXiv:2109.01609.

(2) 深谷, Marche, Lescop の不変量の構成を参考にし、Kontsevich の配置空間積分を、ある種の閉 4 次元多様体上の非自明な局所系に対して拡張した。それを用いてそれらの閉 4 次元多様体の写像類群（微分同相写像のアイソトピー類からなる群）の非自明な元を多数見つけた。特に、 $D^3 \times S^1$ の写像類群が無限生成であるという Budney-Gabai の結果の別証明を与えた。

Tadayuki Watanabe,
Theta-graph and diffeomorphisms of some 4-manifolds,
arXiv:2005.09545.

経緯：当初は 1 次ベッチ数が正の閉 3 次元多様体の不変量を研究する計画であったが、不変量の値域の大きさが、境界がある場合とない場合で驚くほど違う可能性があることを何名かの研究者たちから教えていただいた。そのことを考慮すると、閉 3 次元多様体に対して研究代表者が構成した不変量が本当に「refinement」になっているかどうかは、なっているらしく思われるものの、そのことを証明するのは簡単でないことがわかり、研究期間内に新しい結果を出すためには、計画を根本的に再検討する必要に迫られた。

それとほぼ同時期に、研究代表者は、研究集会「トポロジーとコンピュータ」(2017 年度)での講演依頼をいただいていたため、その時考えていた Morse ホモトピーの方法と、数年前に開発した高次元のクラスパー手術 (Goussarov-葉廣型手術) を 4 次元で適用し、コンピュータで確認すれば、Smale 予想の 4 次元版が全然成り立たないことが示せる、という結果について講演した (不成立だけならコンピュータは不要)。この結果は研究代表者自身が考えていたよりもはるかに重要な意味を持つことが、様々な研究者との交流や文献の調査によってわかってきた。また、研究集会への参加を通じ、4 次元多様体の微分同相群のトポロジーが多くの分野と関わる重要な研究対象であることを認識した。特に、「配置空間積分のトポロジーへの応用」として得られる結果によって多くの研究者に注目される可能性があることがわかり、この方向をメインとして研究を推進することとした。本研究課題の趣旨とも合致すると考えた。

当初の Morse-Novikov 理論に基づく有効な摂動的な不変量の構成については、今後の課題として継続する。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Watanabe Tadayuki	4. 巻 22
2. 論文標題 Higher order generalization of Fukaya's Morse homotopy invariant of S^3 -manifolds, I: invariants of homology S^3 -spheres	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Asian Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 111 ~ 180
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/AJM.2018.v22.n1.a4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Watanabe Tadayuki	4. 巻 15
2. 論文標題 Corrigendum: On Kontsevich's characteristic classes for higher dimensional sphere bundles II: Higher classes	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Topology	6. 最初と最後の頁 347 ~ 357
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/topo.12220	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Botvinnik Boris、Watanabe Tadayuki	4. 巻 16
2. 論文標題 Families of diffeomorphisms and concordances detected by trivalent graphs	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Topology	6. 最初と最後の頁 207 ~ 233
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/topo.12283	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Tadayuki Watanabe	4. 巻 2191
2. 論文標題 Diffeomorphisms of some 4-manifolds constructed by theta graph claspers	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Intelligence of Low-dimensional Topology, RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 1 ~ 7
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計22件（うち招待講演 21件 / うち国際学会 11件）

1. 発表者名 Tadayuki Watanabe
2. 発表標題 Trivalent graphs and diffeomorphisms of some 4-manifolds
3. 学会等名 Intelligence of Low-dimensional Topology (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Tadayuki Watanabe
2. 発表標題 Claspers and barbells in 4-manifolds
3. 学会等名 2021 Georgia Topology Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 渡邊忠之
2. 発表標題 Theta-graph and diffeomorphisms of some 4-manifolds
3. 学会等名 ハンドルセミナー'20 (online) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 渡邊忠之
2. 発表標題 Theta-graph and 4-dimensional light bulb problem
3. 学会等名 微分トポロジー'20 (online) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Tadayuki Watanabe
2. 発表標題 Result in dimension 4
3. 学会等名 Seminar "Configuration space integrals and diffeomorphisms" (Muenster, online) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Tadayuki Watanabe
2. 発表標題 Trivalent graphs and diffeomorphisms of disks
3. 学会等名 Algebraic Topology Seminar (Princeton, online) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Tadayuki Watanabe
2. 発表標題 Trivalent graphs and diffeomorphisms of some 4-manifolds
3. 学会等名 Gauge Theory Virtual (online) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Tadayuki Watanabe
2. 発表標題 Families of diffeomorphisms of 4-manifolds via graph surgery
3. 学会等名 Workshop on 4-manifolds (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tadayuki Watanabe
2. 発表標題 Talk I: Kontsevich's characteristic classes / II: Morse theoretic propagator and graph counting formula / III: Graph surgery construction of 4-manifold bundles / IV: Computation of the invariant
3. 学会等名 HCM Workshop: Automorphisms of Manifolds (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tadayuki Watanabe
2. 発表標題 Families of diffeomorphisms of 4-manifolds via graph surgery
3. 学会等名 Four manifolds: Confluence of high and low dimensions (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 渡邊忠之
2. 発表標題 4次元Smale予想について (1), (2)
3. 学会等名 種々の幾何学的構造と基本群に現れる様々な特性類とその不変量への応用 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 渡邊忠之
2. 発表標題 Diff(S^4)の特性類と族のクラスパー手術
3. 学会等名 日本数学会2018年度秋季総合分科会 (特別講演) (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tadayuki Watanabe
2. 発表標題 Some exotic nontrivial elements of the rational homotopy groups of $\text{Diff}(S^4)$
3. 学会等名 OIST Geometry, Topology and Dynamics Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tadayuki Watanabe
2. 発表標題 Some exotic nontrivial elements of the rational homotopy groups of $\text{Diff}(S^4)$ (1), (2)
3. 学会等名 Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 渡邊忠之
2. 発表標題 4次元球面の微分同相群 / グラフクラスパーと4次元球面束 / 4次元球面束のKontsevich特性類の計算
3. 学会等名 ENCOUNTER with MATHEMATICS (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 渡邊忠之
2. 発表標題 On the 4-dimensional smooth Smale conjecture
3. 学会等名 トポロジーとコンピュータ 2017 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 渡邊忠之
2. 発表標題 Kontsevich's characteristic classes for $\text{Diff}(S^4)$
3. 学会等名 信州トポロジーセミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tadayuki Watanabe
2. 発表標題 An equivariant perturbative invariant of 3-manifolds with $b_1=1$
3. 学会等名 Topological invariants in low-dimensional topology（国際学会）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Tadayuki Watanabe
2. 発表標題 Families of diffeomorphisms of some 4-manifolds constructed by graphs
3. 学会等名 The 6th China-Japan Geometry Conference（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Tadayuki Watanabe
2. 発表標題 Pseudo-isotopies of some spherical 3-manifolds
3. 学会等名 New Developments in Four Dimensions（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Tadayuki Watanabe
2. 発表標題 Theta-graph and diffeomorphisms of some 4-manifolds
3. 学会等名 Low-Dimensional Topology & Homeomorphism Groups (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Tadayuki Watanabe
2. 発表標題 Recent results: Configuration space integral invariants
3. 学会等名 BIRS Workshop: Topology in Dimension 4.5 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

website https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~tadayuki.watanabe/
--

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Topological invariants in low-dimensional topology (共催)	開催年 2017年～2017年
---	--------------------

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------