

令和 4 年 5 月 29 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05264

研究課題名(和文) ウェルデッド絡み目の有限型不変量とその図形的解釈

研究課題名(英文) Diagrammatic approach for finite type invariants of welded links

研究代表者

安原 晃 (Yasuhara, Akira)

早稲田大学・商学大学院・教授

研究者番号：60256625

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：ウェルデッド(ストリング)絡み目に対し、有限型不変量を保存する局所変形(これをWk変形と呼ぶ)を定めた。更に、「(W-)矢表示」と「(W-)矢変形」という概念を導入することにより、古典的絡み目に関するHabiro氏のクラスパー理論を、ウェルデッド絡み目への拡張・構築することに成功した。これをWkクラスパー理論と呼ぶ。Wkクラスパー理論を用いて、次の結果を得た。(1) ウェルデッド・ストリング絡み目のWk同値類は群の構造を持つ。(2) ウェルデッド・ストリング結び目のWk同値類は、アレキサンダー多項式により分類される。(3) ミルナー不変量はWk同値を用いて、幾何的な特徴付けが可能である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では、古典的絡み目に対するクラスパー理論のウェルデッド版である、Wkクラスパー理論を構築することにより、ウェルデッド絡み目の研究を大きく進展させた。古典的絡み目の同値類は、ウェルデッド絡み目の同値類に「埋め込まれる」事が知られている。このことから、通常の絡み目の枠組みでは解決できなかった問題が、ウェルデッド絡み目を研究する事により解決できるという事が期待できる。したがって、古典的クラスパー理論では、解決する事の出来なかった問題が、我々の構築したWkクラスパー理論を用いて解決できるという期待も大きく、本研究分野に与えた影響は計り知れない。

研究成果の概要(英文)：For each positive integer k , we introduce a new notion, W_k -move on welded links, which induces an equivalence relation, W_k -equivalence, on welded links. One of the most important properties of the W_k -equivalence is that it preserves the finite type invariants of welded links of order at most k . We build a theory of W_k -move, may call W_k -clasper theory. And by using this theory, we gave several results as follows: (1) For any positive integer n , the set of W_k -equivalence classes of welded n -string links forms a group structure. (2) For any positive integer k , the set of W_k -equivalence classes of welded 1-string links is classified by their Alexander polynomial of degree at most k . (3) Milnor invariants, which are one of the most important finite type invariants for welded links, can be characterized geometrically in terms of W_k -equivalence.

研究分野：数学

キーワード：ウェルデッド絡み目 ミルナー不変量 有限型不変量 ストリング絡み目 コンコーダント クラスパー理論

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

3次元空間内の単純閉曲線の集合を(古典的)絡み目と呼ぶ。絡み目の平面への「描写」(これを絡み目の図式と呼ぶ)を考え、平面上の図形にある種の局所変形(ライデマイスター変形)を用いて同値関係を導入する事で、空間内の絡み目の研究は、平面上の図式の研究に帰着される。これに対し、空間内の絡み目の図式に対応しない、平面上の曲線を含む集合(ヴァーチャル絡み目)を考え、ライデマイスター変形を含むある種の局所変形から与えられる同値関係のもとでヴァーチャル絡み目の集合を割った同値類がウェルデッド絡み目である。

絡み目の同値類は、ウェルデッド絡み目の同値類に「埋め込まれる」事が知られている。ウェルデッド絡み目と一般の絡み目の関係は、実数と複素数の関係に似ていると言える。実数上で考えても解らなかった事が複素数上で考えると解る事があるように、通常の絡み目の枠組みでは解らなかった事がウェルデッド絡み目を研究する事により明らかになるという事が期待できる。

研究代表者が、ウェルデッド絡み目の研究を始めることになったきっかけは、論文[ABMW]の結果に興味を持ったからである。研究開始当初は、論文自体はまだ出版されていなかったが、研究内容は、著者の1人であり、研究代表者の10年来の共同研究者でもあるのMei Ihan氏(グロノーブル第1大学フーリエ研究所)に以前から聞かされていた。

論文[ABMW]では、通常の絡み目理論における重要な結果の1つである、ストリング絡み目のHabegger-Linのリンク・ホモトピー分類[HL]を、ウェルデッド・ストリング絡み目に拡張することに成功している。ここで、ストリング絡み目とは、円柱の上底と下底に端点をもつ曲線の集合である。また、ウェルデッド・ストリング絡み目とは、ストリング絡み目のウェルデッド絡み目への自然な拡張のことである。

研究代表者は、ウェルデッド・ストリング絡み目に対し、ある3次元のモデルを与え、そのモデル上でHabiroのクラスパー理論を応用する事により、論文[ABMW]の結果の別証明を与えた。このとき用いた議論により、ウェルデッド(ストリング)絡み目に対するクラスパー理論の拡張に関するアイデアが芽生えた。

Habiroのクラスパー理論は、(ストリング)絡み目の不変量研究において最も重要な対象の1つである有限型不変量に図形的解釈を与える研究手段として広く知られている。特に、Goussarov-Habiroの定理[H]として知られる結び目の有限型不変量の図形的解釈に関する定理は重要である。

ウェルデッド(ストリング)絡み目の有限型不変量は、Goussarov, Polyak, Viro [GPV]やBar-Natan, Dancso [BD]の先行研究である。一方、ウェルデッド(ストリング)絡み目におけるクラスパー理論は、当初は知られていなかった。

2. 研究の目的

本研究では、ウェルデッド絡み目におけるクラスパー理論を完成させ、ウェルデッド絡み目の有限型不変量の図形的解釈を行うことを目標とする。

Habiroのクラスパー理論とは、(ストリング)絡み目の局所変形 Ck -move (k は自然数)を定める Ck クラスパーに関する一連の結果の総称で、論文[H]の発表以降、広く知られている。クラスパー理論の重要な結果として、次の3点が挙げられる。

(1) (ストリング) 絡み目の Ck -move は位数 k 以下の有限型不変量を保存する。

(2) ストリング絡み目の Ck 同値類は、群の構造を持つ。ここで Ck 同値とは、 Ck -move により定義される同値関係である。

(3) $C(k+1)$ 同値な (ストリング) 絡み目は、 Ck 同値である。つまり、 Ck 同値は k が大きくなるに従って細かな分類を与える。

本研究において、ウェルデッド絡み目における Ck 同値を新たに定義する場合には、上記の3つの性質を念頭に置き拡張を試みた。

研究代表者は Mei Ihan 氏とのこれまでの共同研究で、ウェルデッド (ストリング) 絡み目に対し、(1) に対応する性質を満たす局所変形 (Wk -move と呼ぶ) を定める事に成功した。ここで、定義に用いたクラスパーは、Habiro の Ck クラスパーと本質的に異なるため、 Wk クラスパーと呼ぶ事にする。

3. 研究の方法

本研究の研究開始後は、研究計画書のに記述した通りに、最初に Wk 同値が上記の(2),(3)に対応する性質を持つ事を示す事を試みた。つまり、

(2-w) ウェルデッド・ストリング絡み目の Wk 同値類は、群の構造を持つ。

(3-w) $W(k+1)$ 同値なウェルデッド (ストリング) 絡み目は、 Wk 同値である。

を証明する。その為には、Habiro のクラスパー理論と同様に、多数の補助定理を証明する必要があった。当初の予想通り、大筋では Habiro の方法に似ていたが、Habiro のクラスパーとは本質的に異なるため、証明は容易ではなかった。後述の通り、(2-w) では予想通りの結果が得られたが、(3-w) に関しては、条件を変更し、やや方向転換をする必要があった。

しかしながら、その後の研究方針に大きな支障はきたさなかったので、研究計画書通りに、研究を続けた。つまり、(2-w),(3-w) を踏まえて、ウェルデッド絡み目の有限型不変量の図形的解釈の研究を進めた。具体的な方針としては、Goussarov-Habiro の定理のウェルデッド版や Goussarov-Habiro の予想「ストリング絡み目が Ck 同値である為の必要十分条件は、位数 k 以下の有限型不変量が一致する事である。」の (ウェルデッド版の) 解決に挑戦した。成分数が 1 である絡み目を結び目と呼ぶ。結び目の場合は、Goussarov-Habiro 予想が正しい事が知られており Goussarov-Habiro の定理として知られている。

Goussarov-Habiro の予想は我々の分野における長年の未解決問題である。研究期間内で解決するのは容易ではないので、(ウェルデッド) 結び目の場合に限って、ウェルデッド版の Goussarov-Habiro の予想の解決を目指した。

後述のように、幸いこの問題は、研究期間途中で解決できた。残りの研究機関では、ウェルデッド絡み目の最も重要な有限型不変量の 1 つである、ミルナー不変量の図形的解釈に集中した

4. 研究成果

上述の通り、絡み目の一般化であるウェルデッド絡み目に対する絡み目の有限型不変量の拡張は、Goussarov, Polyak, Viro [GPV] や Bar-Natan, Dancso [BD] による先行研究が知られている。通常の絡み目の場合、有限型不変量の図形的 (幾何的) な解釈の研究手段として、Habiro [H] によるクラスパー理論が知られている。一方、ウェルデッド絡み目の有限型不変量の図形的解釈の研究に関しては、幾つかの試みはあるものの満足のいく結果は得られていなかった。本研究では、ウェルデッド絡み目の有限型不変量の図形的解釈の研究の為に、Habiro のクラス

パー理論のウェルデッド絡み目版と見なせるものを新たに定め、ウェルデッド絡み目の有限型不変量の図形的解釈を与えることを目標とし、以下で述べる結果をえた。

研究代表者は Meilhan 氏との共同研究で、ウェルデッド（ストリング）絡み目に対し、有限型不変量を保存する局所変形（これを、Wk-move と呼ぶ）を定める事に成功した。ここで、定義に用いたクラスパーは、Habiro の Ck クラスパーと本質的に異なるため、Wk クラスパーと呼ぶ事にする。研究代表者は、Meilhan 氏との共同研究で「Wk クラスパー理論」を構築することに成功した[MY]。この理論の土台になる概念が、「(W-)矢表示」と「(W-)矢変形」である。Wk クラスパーの研究を Habiro のクラスパー理論と対比させながら研究を進める事で、以下の定理を得た。

[定理 1] ウェルデッド・ストリング絡み目の Wk 同値類は、群の構造を持つ。

これは、研究計画調書で予想した通りの結果であり、ここで用いた議論は、Wk クラスパー理論の土台を固める事になり、その後の研究に大いに役立った。定理 1 を踏まえて、研究を進め、ウェルデッド・ストリング結び目の群を Alexander 多項式を用いて完全に特徴つけることに成功した。つまり、次の定理を得た。

[定理 2] ウェルデッド・ストリング結び目の群は可換群である。更に、この群は Alexander 多項式により完全に分類できる。

また、Wk 同値の定義を（今後の議論に本質的に影響のない範囲で）改良して、 $W(k+1)$ 同値なウェルデッド（ストリング）絡み目は、Wk 同値が成立するようにした。これにより、Wk 同値は、自然数 k が大きい程、細かな分類を与えるという、非常に良い性質を持つ事がわかる。研究課題に沿って、研究を進めるうちに、ウェルデッドストリング絡み目の最も重要な有限型不変量の 1 つであるミルナー不変量を、ウェルデッド絡み目に拡張することに成功した。ミルナー不変量のウェルデッド絡み目への拡張は、これまで数多くの研究者が試みて成功して いなかった。それ故に、本研究成果の価値は大きい。

研究期間の最後の 2 年間は、これまで共同研究を続けてきた Jean-Baptiste Meilhan 氏だけでなく、新たにマルセイユ大学の Benjamin Audoux 氏を共同研究者に加えることにより、W-矢変形を用いてミルナー不変量の特徴付けに関する研究を続け、以下で以下の結果を得た。

新たな同値関係として、自己 Wk-コンコダントを定義した。これは、自己 Wk 同値とコンコダントと呼ばれる既知の同値関係を組み合わせた同値関係である。この同値関係によって、ミルナー不変量の特徴を旨く捕らえる事ができる。実際、以下の定理が成立する事がわかった。

[定理 3] $r(l)$ が k 以下の数列 l に対する Milnor 不変量は、自己 Wk-コンコダント不変量である。ここで、 $r(l)$ は l に現れる数字の繰り返し回数の最大値である。

上述の通り、絡み目の同値類は、ウェルデッド絡み目の同値類に「埋め込まれる」事が知られている。古典的絡み目の枠組みでは解らなかつた事がウェルデッド絡み目を研究する事により明らかになるという事が期待できる。したがって、従来のクラスパー理論では、解決する事の出来なかつた問題が、我々の構築した Wk クラスパー理論を用いて解決できるという期待も大きい。この様に、古典的絡み目の問題をウェルデッド絡み目に拡張して、大きな視点で解くとい

う方法は、これまでになく独創的なアイデアであり、ウェルデッド絡み目だけでなく、結び目理論の今後の発展に大きく貢献したといえるだろう。

参考文献

- [ABMW] B. Audoux, P. Bellingeri, J-B. Meilhan, E. Wagner, *Homotopy classification of ribbon tubes and welded string links*, to appear in *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa I*, **XVII** (2017), 713-761
- [BD] D. Bar-Natan and Z. Dancso, *Finite-type invariants of w -knotted objects, I: w -knots and the Alexander polynomial*, *Algebr. Geom. Topol.* **16** (2016), 1063--1133
- [GPV] M. Goussarov, M. Polyak, and O. Viro, *Finite-type invariants of classical and virtual knots*, *Topology*, **39** (2000) 1045--1068
- [HL] N. Habegger and X.S. Lin, *The classification of links up to link-homotopy*, *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), 389--419.
- [H] K. Habiro, *Claspers and finite type invariants of links*, *Geom. Topol.* **1** (2000), 1--83
- [MY] J-B. Meilhan and A. Yasuhara, *Arrow calculus for welded and classical links*, *Algebr. Geom. Topol.* **19** (2019), 397--456

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Haruko A. MIYAZAWA, Kodai WADA, Akira YASUHARA	4. 巻 72
2. 論文標題 Generalized virtualization on welded links	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 923 - 944
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/82248224	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Haruko A. Miyazawa, Kodai Wada and Akira Yasuhara	4. 巻 147
2. 論文標題 Burnside groups and n-moves for links	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 3595 - 3602
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/proc/14470	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Jean-Baptiste Meilhan and Akira Yasuhara	4. 巻 19
2. 論文標題 Arrow calculus for welded and classical links	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Algebraic & Geometric Topology	6. 最初と最後の頁 397 - 456
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/agt.2019.19.397	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Takuji Nakamura, Yasutaka Nakanishi, Shin Satoh b, Akira Yasuhara	4. 巻 247
2. 論文標題 The pass move is an unknotting operation for welded knots	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 9-19
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.topol.2018.07.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Haruko Aida Miyazawa, Kodai Wada, Akira Yasuhara	4. 巻 18
2. 論文標題 Link invariants derived from multiplexing of crossings	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Algebraic & Geometric Topology	6. 最初と最後の頁 .2497 - 2507
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/agt.2018.18.2497	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Haruko Aida Miyazawa, Kodai Wada and Akira Yasuhara	4. 巻 26
2. 論文標題 Linking invariants of even virtual links	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and Its Ramifications	6. 最初と最後の頁 1750072:1--12
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0218216517500729	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Natsuka Kobayashi, Kodai Wada and Akira Yasuhara	4. 巻 224
2. 論文標題 Milnor invariants of covering links	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Topology and Its Applications	6. 最初と最後の頁 60--72
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2017.04.002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 安原晃
2. 発表標題 境界付き曲面絡み目のミルナー不変量と基本群彩色
3. 学会等名 2019年度琉球結び目セミナー, 那覇市ぶんかテンプス館
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Akira Yasuhara
2. 発表標題 Burnside groups and n-moves for links
3. 学会等名 Knots in Washington XLVII (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 安原晃
2. 発表標題 絡み目のMilnor不変量と2n-move
3. 学会等名 研究集会「2018年度琉球結び目セミナー」
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Akira Yasuhara
2. 発表標題 Burnside groups and n-moves for links
3. 学会等名 Topology Seminar, Institut Fourier
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 安原晃
2. 発表標題 ウェルデッド絡み目のArrow diagramについて
3. 学会等名 東京女子大学トポロジーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Akira Yasuhara
2. 発表標題 Arrow calculus for welded links
3. 学会等名 Topology and Geometry of Low-dimensional Manifolds (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
フランス	University of Grenoble Alpes	Aix-Marseille University	