

令和 3 年 5 月 25 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05266

研究課題名(和文) 行列・作用素解析(不等式, 平均, マジヨリゼーション)と量子情報理論への応用

研究課題名(英文) Matrix/operator analysis (inequalities, mean, majorization) and applications to quantum information

研究代表者

日合 文雄 (Hiai, Fumio)

東北大学・情報科学研究科・名誉教授

研究者番号：30092571

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：近年発展が目覚ましい量子情報理論の分野では、行列・作用素解析が数学的基礎として重要な役割を果たしている。本研究では、量子情報への応用を念頭において、行列・作用素解析に関連する種々の問題を不等式の観点から研究し、多方面にわたって成果を得た。行列・作用素解析に固有な問題として、行列・作用素に対する様々な不等式、2変数および多変数の作用素平均、および行列・作用素のマジヨリゼーションについて、相互に関連させて研究を行った。量子情報の分野では、行列・作用素解析の手法を応用して、いくつかタイプの量子ダイバージェンスに対して、量子情報路の下での単調性とリバーシビリティなどについて研究した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

行列・作用素解析の研究では関数解析的な考え方が基本であるが、本研究ではリーマン幾何からのアイデア、確率論を使う手法、量子情報理論との相互乗り入れなど、多面的な考え方と方法論を駆使したところに、学術的意義と特色がある。本研究の研究成果を適宜、内外の数学専門雑誌に発表することにより、数学の国際コミュニティへの発信を通して社会に寄与することができた。特に、本研究期間中に、フォン・ノイマン環と量子ダイバージェンスに関する2冊のモノグラフをヨーロッパ数学会とシュプリンガー社から出版したことで、これらの分野の発展に貢献できた。

研究成果の概要(英文)：Matrix/operator analysis has played an important role in quantum information theory that has intensively developed in recent years. In the course of this research project, toward applications to quantum information, we studied various problems related to matrix/operator analysis from the point of view of inequalities and obtained many results in different related subjects. Concerned with problems in matrix/operator analysis itself, we studied various inequalities, operator means of two-variables and several variables, and majorizations for matrices and operators, in relation to each other. As for quantum information, applying techniques from matrix/operator analysis, we studied monotonicity and reversibility under quantum channels for several types of quantum divergences.

研究分野：関数解析学

キーワード：関数解析学 作用素 行列解析 作用素平均 量子情報理論

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 行列(また作用素)に対する不等式の研究は、半正定値性から定まる大小関係に関する行列そのものの不等式、行列の固有値・特異値に対する大小関係やマジョリゼーション(優越関係)、行列のトレースやノルム関数に対する不等式など様々である。行列・作用素不等式の歴史は非常に古く、体系的な研究は Löwner の 1934 年の論文と彼の弟子 Kraus の 1936 年の論文に始まる。彼等の理論は作用素単調・作用素凸関数についての理論であり、これらの関数の積分表示が行列・作用素解析の多くの場面で重要な役割を演じてきた。特に、久保-安藤による作用素平均の理論(1980 年)により、作用素単調関数と作用素平均は 1 対 1 に対応することが示された。行列固有値のマジョリゼーションは行列論において最も行列解析らしい話題の 1 つであり、数多くの研究が行われてきた。中でも、安藤-日合が示した対数マジョリゼーションは、この方面の研究に大きな刺激を与えた。このように、行列解析の分野は様々な設定と手法で多岐にわたり息の長い研究と応用が行われてきた。本研究開始当初においては、作用素平均、特に(重み付き)幾何平均の多変数の行列・作用素への拡張、それに関連した対数マジョリゼーションの拡張が活発に議論されつつあった。

(2) 量子確率統計を基礎とする量子情報理論の研究は 1970 年代に A.S. Holevo 等によって開始されたが、20 年間ほど停滞気味であった。しかし、エンタングル状態が発見されたことや長い間の懸案であった量子情報路符号化定理が証明されたことが契機となって、量子情報理論は 1990 年代後半以降に爆発的に発展し、近年では膨大な研究分野に拡大した。日合-D. Petz が 1991 年の論文で量子 Stein の補題の順定理を示したことは、本研究開始当初における量子仮説検定理論の目覚ましい発展の先駆けであった(これの逆定理は小川-長岡が 2000 年に示した)。さらに、Petz が導入した相対エントロピーの一般化である擬エントロピー(量子ダイバージェンスともいう)とフィッシャー情報量の量子版である単調計量(量子フィッシャー情報量ともいう)は、量子情報理論と量子情報幾何で必須の概念であり、それらを含む不等式が分野の多くの場面で現れる。量子情報で重要なこれらの量は、作用素単調関数と作用素凸関数を基礎にして定義され、不等式の証明などに作用素平均やマジョリゼーションが使われた。このように、量子情報の多くの分野が行列解析と理論的かつ方法論的に密接に関連しつつあった。

## 2. 研究の目的

(1) 久保-安藤により公理的に導入された 2 変数の作用素平均の理論は、行列解析の分野で重要な役割を果たしてきた。作用素平均を 3 変数以上の多変数の場合に拡張することが、本研究開始当時の研究方向であった。特に(重み付き)幾何平均の多変数への拡張は、安藤-Lie-Mathias が先鞭を付けた反復プロセス法や Bhatia-Holbrook が導入したリーマン幾何的な方法で活発に研究された。リーマン幾何の方法は、正定値行列の空間が自然なリーマン計量で負曲率リーマン多様体をなすことを基礎にして、測地最短距離の 2 乗和の最小化により幾何平均(Karcher 平均、Cartan バリセンターとも呼ばれる)を導入するもので、近年発展が著しい負曲率計量空間上の確率解析が有効に使われていた。この方向で、作用素平均に対する安藤-日合の不等式や Lie-Trotter 型の極限公式を発展させることを目指した。さらに、作用素パースペクティブ(遠近法)に対しても、同様な不等式や極限公式の拡張を試みた。

(2) 行列(および作用素)のマジョリゼーションについては、膨大な論文と結果が知られているが、Golden-Thompson と Lieb-Thirring のトレース不等式を拡張した荒木(1990)の対数マジョリゼーションと Golden-Thompson 補完型の安藤-日合(1994)の対数マジョリゼーションは注目に値する。これらの対数マジョリゼーションと極限公式をいくつかの設定で拡張することを目指した。特に(1)で述べた Cartan バリセンター(リーマン計量による一種の重心)に対する対数マジョリゼーションを試みた。

(3) 量子情報理論と量子情報幾何において重要な不等式には、梅垣相対エントロピーやレニィ相対エントロピーを拡張したいくつかのタイプの量子ダイバージェンス(標準 f-ダイバージェンス、極大 f-ダイバージェンス、測定型 f-ダイバージェンスなど)や単調計量と呼ばれるリーマン計量を含むものが多い。他にもフィデリティや最近研究が沸騰しているサンドイッチ型レニィ相対エントロピーなど、量子情報理論で重要な量はすべて行列のトレース関数で表される。行列解析を基礎として、量子情報に現れるいろいろな量子ダイバージェンスの間の不等式とその等号条件についての研究を目指した。特に、これらの量子ダイバージェンスに対する量子情報路(または量子確率写像)の下での単調性(データ処理不等式と呼ばれる)とその等号条件の下でのリバーシビリティ(復元可能性)は重要で興味深いテーマであった。

(4) 有限次元の行列の場合の量子ダイバージェンスの研究をフォン・ノイマン環上の正規な正線形汎関数に対する量子ダイバージェンスの場合に一般化して、量子ダイバージェンスの単調性やリバーシビリティ(復元可能性)問題を研究することを目指した。将来的には、量子情報の分野の関連する問題をフォンノイマン環の場合に拡張した設定で研究することを意図した。

### 3. 研究の方法

行列・作用素不等式の理論分野と量子情報理論の応用分野を双方向的に関連させながら研究を行った。研究が実効あるものになるように、研究テーマ別に以前から共同研究している共同研究者に研究協力者になってもらい、随時メールで連絡を取りながら研究を進め、必要に応じて研究協力者を訪問し討議した。また、国内外の関係する研究集会・ワークショップに参加し、成果発表と情報交換を行った。具体的な共同研究の内容は以下の通りである。

(1) 本研究の初年度に以前からの共同研究者である M. Mosonyi 氏(ハンガリー)と共同研究できたことは有意義であった。また、R. König 氏(ドイツ)および M. Tomamichel 氏(オーストラリア)と共同研究できたことも、代表者にとって貴重な経験であった。

(2) Y. Lim 氏(韓国)および J. Lawson 氏(米国)と、正定値行列・作用素の空間上の Cartan 重心や Wasserstein 距離について共同研究を行ったことは、本研究を進める上で非常に生産的であった。

(3) 瀬尾氏(大阪教育大)および和田氏(木更津高専)と、多変数作用素平均と作用素パースペクティブに対する安藤-日合型の不等式について系統的な共同研究を行った。

(4) 幸崎氏(九州大名誉教授)と行ったフォン・ノイマン環における作用素コネクションに関する共同研究は大変有意義であった。

(5) フォン・ノイマン環における量子ダイバージェンスについての2編の J. Math. Phys. 論文を発展させたモノグラフと、2019年にブダペスト工業経済大学で行ったフォン・ノイマン環に関する集中講義をまとめた講義録を本研究の最終年度に出版できたことは代表者にとって幸運であった。

### 4. 研究成果

以下に、本研究の成果を各発表論文に対応させて説明する。

(1) M. Lin(中国)との共同研究により、アダマール積と幾何平均に関係して知られた行列の固有値に対するマジョリゼーションを重み付き幾何平均の場合に拡張した。

(2) R. König(独)と M. Tomamichel(オーストラリア)との共同研究により、行列の固有値のマジョリゼーションを積分による平均を含む形式に一般化し、それを用いて、Golden-Thompson トレース不等式の変数版をユニタリ不変ノルムに対する一般的なノルム不等式として証明することに成功した。これにより E.H. Lieb の有名な論文(1973)以来の長年の問題であった3個以上の作用素に対する Golden-Thompson 不等式に対する一定の解答を与えた。

(3) Y. Lim(韓国)との共同研究により、 $n$ 次正定値行列のなすリーマン多様体(負計量空間の典型例となる)上の確率測度の Cartan 重心(幾何平均の確率測度への一般化)に対する Ando-Hiai の対数マジョリゼーションを示した。さらに、確率測度の幾何平均による流れに対する Cartan 重心の軌跡の微分可能性を示し、それを用いて、ユニタリ不変ノルム不等式と Lie-Trotter の極限公式を得た。

(4) M. Mosonyi(ハンガリー)との共同研究により、量子情報の分野で重要ないろいろな量子  $f$ -ダイバージェンスについて組織的に研究した。標準型  $f$ -ダイバージェンスと極大型  $f$ -ダイバージェンスについて、量子情報路の下での単調不等式の等号条件からリバーシビリティがどの程度成立するかを比較した。これら2つの  $f$ -ダイバージェンスの間の大小関係を示した。さらに、 $-z$ -レニィ・ダイバージェンスと呼ばれる一般化されたレニィ・ダイバージェンスについて単調性とリバーシビリティを考察した。

(5) J. Lawson(米国)および Y. Lim(韓国)との共同研究により、最近発展している順序をもつ距離空間上の確率測度に対する重心写像の研究の一環として、確率測度の空間上の確率順序(stochastic order)について研究した。さらに、Y. Lim との共同研究により、 $n$ 次正定値行列の

なすリーマン多様体(負計量空間の典型例となる)上のリーマン計量に関して固有値関数とシンプレクティック固有値関数がリプシッツ連続であることを示し,さらにこの多様体上の確率測度に対する Cartan 重心(幾何平均の確率測度への一般化)に対する対数マジョリゼーションを示した.

(6) 以前に,量子情報で有用な相対エントロピーやレニィ・ダイバージェンスを一般化した量子  $f$ -ダイバージェンスについて, M. Mosonyi (ハンガリー)と有限次元のヒルベルト空間の設定で共同研究した.その継続研究として,フォン・ノイマン環の設定での量子ダイバージェンスを研究し,単著の連作論文を J. Math. Phys. に出版した.

(7) 瀬尾(大阪教育大)および和田(木更津高専)と共同研究を行い,作用素平均に対する安藤-日合型の不等式について考察し,2編の共著論文を出版した.1番目の論文では,近年発展が著しい多変数の作用素平均に対して,従来型だけでなく補完型さらに逆向き型などの幾つかの形式の安藤-日合型不等式を系統的に示した.2番目の論文では,従来型の安藤-日合不等式を改良するとともに,作用素パースペクティブ(遠近法)に対する安藤-日合不等式, Lie-Trotter 公式,非可逆正作用素への拡張問題などを研究した.

(8) Y. Lim (韓国)と引き続き共同研究を行い,2編の共著論文を出版した.1番目の論文では,縮小重心写像をもつ完備距離空間に値をとる確率変数に対する条件付き期待値の理論を構築し,マルチンゲール収束,パーコフ・エルゴード収束,サノフ大偏差原理などの収束理論を研究した.2番目の論文では,無限次元ヒルベルト空間上の可逆正作用素からなるトンプソン距離をもつ完備距離空間上の確率測度に対する作用素平均の概念を定式化し,不動点を用いた手法で確率測度の作用素平均について多くの結果を示した.また別の単著論文で,従来の2変数の久保-安藤の作用素平均と  $n$  変数の作用素平均について,不動点法による詳細な考察を行った.

(9) Y. Lim および J. Lawson (米国)と引き続き共同研究を行い,正定値行列の空間上で作用素平均から派生した非斉次の Karcher 型作用素方程式について,ランベルトの  $W$  関数と関連づけて研究した.

(10) 幸崎(九州大名誉教授)との共同研究により,フォン・ノイマン環に付随する非有界作用素の種々のクラスにおいて,久保-安藤の作用素平均・作用素コネクションを拡張する理論を構築した.

(11) フォン・ノイマン環の設定で,量子情報で有用な相対エントロピーやレニィ・ダイバージェンスを一般化した量子  $f$ -ダイバージェンスとそれらのリバーシビリティ(復元可能性)への応用について解説した194ページのモノグラフを Springer の Mathematical Physics Studies のシリーズから出版した.さらに,フォン・ノイマン環の基礎理論に関する250ページの講義録をヨーロッパ数学会(EMS)の Lectures in Mathematics のシリーズから出版した.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計17件（うち査読付論文 17件／うち国際共著 10件／うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Y. Lim, F. Hiai and J. Lawson	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Nonhomogeneous Karcher equations with vector fields on positive definite matrices	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Eur. J. Math.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40879-021-00469-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 F. Hiai and H. Kosaki	4. 巻 32
2. 論文標題 Connections of unbounded operators and some related topics: von Neumann algebra case	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Internat. J. Math.	6. 最初と最後の頁 2150024-1--88
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0129167X21500245	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 F. Hiai	4. 巻 5
2. 論文標題 Operator means deformed by a fixed point method	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Adv. Oper. Theory	6. 最初と最後の頁 680--713
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s43036-019-00034-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 F. Hiai and Y. Lim	4. 巻 365
2. 論文標題 Operator means of probability measures	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Adv. Math.	6. 最初と最後の頁 107038-1--40
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.aim.2020.107038	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 F. Hiai, Y. Seo and S. Wada	4. 巻 31
2. 論文標題 Ando--Hiai-type inequalities for operator means and operator perspectives	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Internat. J. Math.	6. 最初と最後の頁 2050007-1--44
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0129167X2050007X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 F. Hiai and Y. Lim	4. 巻 22
2. 論文標題 Convergence theorems for barycentric maps	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Adv. Math.	6. 最初と最後の頁 1950016-1--40
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0219025719500164	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 F. Hiai, Y. Seo and S. Wada	4. 巻 67
2. 論文標題 Ando--Hiai type inequalities for multivariate operator means	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Linear and Multilinear Algebra	6. 最初と最後の頁 2253--2281
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/03081087.2018.1488938	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 F. Hiai	4. 巻 563
2. 論文標題 Log-majorization related to Renyi divergences	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Linear Algebra Appl.	6. 最初と最後の頁 255--276
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.laa.2018.11.004	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 F. Hiai	4. 巻 60
2. 論文標題 Quantum f-divergences in von Neumann algebras II. Maximal f-divergences	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Math. Phys.	6. 最初と最後の頁 012203-1--30
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.5051427	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 F. Hiai	4. 巻 59
2. 論文標題 Quantum f-divergences in von Neumann algebras I. Standard f-divergences	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Math. Phys.	6. 最初と最後の頁 102202-1--27
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1063/1.5039973	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 F. Hiai and Y. Lim	4. 巻 553
2. 論文標題 Log-majorizations for the (symplectic) eigenvalues of the Cartan barycenter	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Linear Algebra Appl.	6. 最初と最後の頁 129--144
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.laa.2018.04.029	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 F. Hiai, J. Lawson and Y. Lim	4. 巻 464
2. 論文標題 The stochastic order of probability measures on ordered metric spaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 J. Math. Anal. Appl.	6. 最初と最後の頁 707--724
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2018.04.038	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 F. Hiai and Y. Lim	4. 巻 533
2. 論文標題 Geometric mean flows and the Cartan barycenter on the Wasserstein space over positive definite matrices	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Linear Algebra Appl.	6. 最初と最後の頁 118--131
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.laa.2017.07.017	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 F. Hiai and M. Mosonyi	4. 巻 29
2. 論文標題 Different quantum f-divergences and the reversibility of quantum operations	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Rev. Math. Phys.	6. 最初と最後の頁 1750023-1--80
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0129055X17500234	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 F. Hiai and Y. Lim	4. 巻 453
2. 論文標題 Log-majorization and Lie--Trotter formula for the Cartan barycenter on probability measure spaces	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 J. Math. Anal. Appl.	6. 最初と最後の頁 195--211
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2017.03.027	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 F. Hiai, R. Konig and M. Tomamichel	4. 巻 18
2. 論文標題 Generalized log-majorization and multivariate trace inequalities	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Ann. Henri Poincare	6. 最初と最後の頁 2499--2521
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00023-017-0569-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 F. Hiai and M. Lin	4. 巻 515
2. 論文標題 On an eigenvalue inequality involving the Hadamard product	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Linear Algebra Appl.	6. 最初と最後の頁 313--320
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.laa.2016.11.017	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計17件 (うち招待講演 17件 / うち国際学会 15件)

1. 発表者名 F. Hiai
2. 発表標題 Generalized Lyapunov equations and optimized measurements
3. 学会等名 Quantum Information Theory and Mathematical Physics 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 F. Hiai
2. 発表標題 Operator means of probability measures
3. 学会等名 Advances in the Geometric and Analytic Theory of Convex Cones (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 F. Hiai
2. 発表標題 Matrix limit theorems of reciprocal Lie-Trotter type
3. 学会等名 International Conference on Matrix Theory with Applications: Combinatorics, Optimization, Data Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 F. Hiai
2. 発表標題 Quantum f-divergences in von Neumann algebras
3. 学会等名 Mathematical Aspects in Current Quantum Information Theory 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 F. Hiai
2. 発表標題 Log-majorization related to Renyi divergences
3. 学会等名 2018 China-Korea International Conference on Matrix Theory with Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 F. Hiai
2. 発表標題 Conditional expectations and martingales for barycentric maps on metric spaces
3. 学会等名 Workshop on Barycenters, Convexity on Metric Spaces and Positive Operators (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 F. Hiai
2. 発表標題 Quantum f-divergences in operator algebras
3. 学会等名 Quantum Information Theory and Mathematical Physics 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 日合文雄
2. 発表標題 多変数の行列・作用素平均
3. 学会等名 日本数学会年会, 函数解析学学科会特別講演 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 F. Hiai
2. 発表標題 Quantum f-divergences in von Neumann algebras
3. 学会等名 Workshop: Beyond I.I.D. in Information Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 F. Hiai
2. 発表標題 Convergence theorems for barycentric maps
3. 学会等名 18th Workshop: Noncommutative Probability, Operators Algebras, Random Matrices and Related Topics, with Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 F. Hiai
2. 発表標題 Quantum f-divergences in von Neumann algebras
3. 学会等名 The 7th International Conference on Matrix Analysis and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 F. Hiai
2. 発表標題 Ando-Hiai type inequalities for multivariate operator means
3. 学会等名 2018 International Conference on Matrix Inequalities and Matrix Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 F. Hiai
2. 発表標題 Operator means deformed by a fixed point method
3. 学会等名 2017 Korea-China International Conference on Matrix Theory with Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 F. Hiai
2. 発表標題 Different quantum divergences in general von Neumann algebras
3. 学会等名 Workshop on Operator Algebras and Quantum Information Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 F, Hiai
2. 発表標題 Different quantum divergences in general von Neumann algebras
3. 学会等名 Quantum Information Theory and Mathematical Physics 2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 F. Hiai
2. 発表標題 Log-majorization and Lie-Trotter formula for the Cartan barycenter
3. 学会等名 2017 Meeting of the International Linear Algebra Society (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 日合文雄
2. 発表標題 Von Neumann環における量子ダイバージェンス
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)「量子場の数理論とその周辺」(招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計2件

1. 著者名 F. Hiai	4. 発行年 2021年
2. 出版社 Springer	5. 総ページ数 194
3. 書名 Quantum f-Divergences in von Neumann Algebras	

1. 著者名 F. Hiai	4. 発行年 2021年
2. 出版社 European Mathematical Society	5. 総ページ数 250
3. 書名 Lectures on Selected Topics in von Neumann Algebras	

〔産業財産権〕

〔その他〕

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	リム ヨンド  (Lim Yongdo)		
研究協力者	ローソン ジミー  (Lawson Jimmie)		
研究協力者	モショニィ ミラン  (Mosonyi Milan)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
韓国	Sungkyunkwan大学			
米国	ルイジアナ州立大学			
ハンガリー	ブダペスト工業経済大学			
ドイツ	ミュンヘン工科大学			
オーストラリア	シドニー工科大学			
中国	上海大学			