

令和 4 年 6 月 13 日現在

機関番号：15101

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05280

研究課題名（和文）可解リー群上の非可換調和解析とその応用

研究課題名（英文）Non-commutative harmonic analysis on solvable Lie groups and its applications

研究代表者

井上 順子（Inoue, Junko）

鳥取大学・教育支援・国際交流推進機構・教授

研究者番号：40243886

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,800,000円

研究成果の概要（和文）：可分ユニモジュラー1型局所コンパクト群GのLpフーリエ変換（ $1 < p < 2$ ）のノルム $F_p(G)$ について、 N を G/N がコンパクトとなるユニモジュラー1型閉正規部分群とすると、 $F_p(G)$ が N におけるノルム $F_p(N)$ 以下であることを示した。
指数型可解リー群Gとその内部自己同型群を含む指数型自己同型の指数型可解リー群Dに対し、Gの既約表現のD軌道の C^* 群環における核が L^1 決定であるための十分条件を軌道法を用いて与えた。
指数型可解リー群Gの複素解析的誘導表現とGの各既約表現において誘導に関わる半不変一般ベクトルの空間について、この空間の次元とにおけるの重複度が一致しない例を見つけた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

局所コンパクト群・群環の表現論において、Lpフーリエ変換のノルムを求める問題は重要であり、様々な群を対象に多くの研究が行われている。本研究で扱ったコンパクト拡大においては、Russoにより共役指数 q が偶数の場合に同様のノルム評価が与えられているが、本研究結果はRussoの結果を一般の指数 p （ $1 < p < 2$ ）に拡張したものとなる。
誘導表現の既約分解を無限次元表現に拡張されたフロベニウス相互律の形で記述することは基本問題の1つである。本研究の結果から、指数型可解リー群の複素解析的誘導表現で、従来の定義による相互律とは異なる現象が新たに見つかったことになる。

研究成果の概要（英文）：Concerning the norm $F_p(G)$ of the L_p -Fourier transform on a separable unimodular locally compact group G of type 1, we obtained the following estimate. Let N be a unimodular closed normal subgroup of type 1 such that G/N is compact. Then we showed that $F_p(G)$ is less than or equal to $F_p(N)$.
Let G be an exponential solvable Lie group and D be an exponential solvable Lie group of its automorphisms of exponential type containing the group of inner automorphisms of G . By the orbit method, we gave a sufficient condition of the kernel of the D orbit of an irreducible representation to be L^1 -determined.
Concerning holomorphically induced representation of an exponential solvable Lie group G and the space of associated semi-invariant generalized vectors of each irreducible representation, we found examples for which the dimension of the space and the multiplicity of in do not coincide.

研究分野：表現論

キーワード：非可換調和解析 可解リー群 フーリエ変換 複素解析的誘導表現 ユニタリ表現論

1. 研究開始当初の背景

可解リー群の表現論においては、群の既約ユニタリ表現をその群の余随伴軌道に関連付けるという発想に基づく Kirillov の「軌道法」が基本的である。Kirillov、Bernat、Pukanszky、Vergne らによる理論の構築に続き、Auslander-Kostant により単連結型可解リー群のユニタリ双対の構成は完成され、型可解リー群上のユニタリ表現論の基礎が確立された。とくに指数写像がリー環からリー群への微分同型である「指数型可解リー群」では、軌道法による余随伴軌道とユニタリ双対の対応は、商空間としての位相を与えた余随伴軌道の空間と Fell 位相を与えたユニタリ双対との同相写像であることが Leptin-Ludwig により示されており、群環の構造の解明や表現の構成・分解など具体的な非可換調和解析の問題において、この方法の更なる応用が期待されている。

研究代表者は、これまで軌道法の視点から、指数型可解リー群のフーリエ変換の解析の問題、 L^p フーリエ変換のノルムに関する問題、指数型可解リー群の誘導表現の構成と分解およびこれに付随する「相互律」に関わる問題を取り上げ研究を進めてきた。

2. 研究の目的

- (1) 指数型可解リー群の群環とそのフーリエ変換の構造の解析を行う。軌道法によるユニタリ双対の構成および余随伴軌道の幾何との関係を踏まえて解析を進める。
- (2) 冪零・可解リー群、あるいはこれらを半直積因子にもつ群等、様々なリー群において L^p フーリエ変換のノルムの評価、計算を行い、リー群上の L^p フーリエ解析を進める。
- (3) 指数型可解リー群において、一般の複素部分リー環からの複素解析的誘導表現の構成例を集め、表現の既約分解と既約表現の半不変超関数ベクトルを記述する。

3. 研究の方法

指数型可解リー群の群環とそのフーリエ変換の構造については、ロレーヌ大学(フランス)の Ludwig 氏との共同研究で、群環の $*$ 正則性に関する問題を取り上げた。軌道法によるユニタリ双対と余随伴軌道の対応により、既約表現に関する解析的な情報を余随伴軌道の幾何的な情報を用いて記述する解析手法を使った。

群上の L^p フーリエ解析については、スファックス大学(チュニジア)の Baklouti 氏との共同研究で、これまでの研究に引き続き、群のコンパクト拡大と L^p フーリエ変換のノルムの関係を調べた。

指数型可解リー群における複素解析的誘導表現については、これまでの研究に引き続き可換正規部分群 R^n と R の半直積群や、完全可解振動子群を対象として、リー環の複素化における、一般の複素部分リー環から構成される複素解析的誘導表現を調べた。得られた表現の既約分解と各既約表現における半不変一般ベクトル(超関数ベクトル)の空間を求め、余随伴軌道との関連や、超関数の意味でのフロベニウス相互律としての意味付けを試みた。

国際研究集会「5th Tunisian-Japanese Conference Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications」(2017年12月、Mahdia(チュニジア)) および国際研究集会「6th Tunisian-Japanese Conference Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications in Honor of Professor Takaaki Nomura」(2019年12月、Djerba(チュニジア)) に出席し、それぞれ複素解析的誘導表現に関して当集会開催時まで得られた研究成果に基づいて講演・研究議論を行った。これらは研究結果を改良・整理し論文にまとめる上で大いに有益だった。

また、2018年11月に森義之氏(岡山理科大学)と共同で研究集会「2018年度表現論シンポジウム」を開催し世話人を務めた。この集会で表現論・非可換調和解析関連分野の講演聴講、議論等により研究情報を得ることができた。

4. 研究成果

- (1) 局所コンパクト群 G の群環 $L^1(G)$ の C^* 環の閉イデアル J は、群環 $L^1(G)$ と J との共通部分が J で稠密の時、 L^1 決定 (L^1 -determined) であるといい、群環 $L^1(G)$ はその C^* 環の閉イデアル J が全て L^1 決定の時、 $*$ 正則 ($*$ -regular) であるという。 $*$ 正則性は群環の解析において重要であり、例えば連結冪零リー群の群環はこの性質を持つが、一般の指数型可解リー群の群環は $*$ 正則とは限らないことが知られている。そこで先行する研究において Ungermaun は L^1 決定性に着目し、 $*$ 正則より弱い条件「 C^* 群環の全ての原始イデアルが L^1 決定である」で定義される「原始 $*$ 正則 (primitive $*$ -regular)」の概念を導入し、指数型可解リー群において群環が原始 $*$ 正則であるための十分条件を与えた。

このことを踏まえ、 C^* 群環における L^1 決定性に関して、ロレーヌ大学の Ludwig 氏との共同研究により、次の結果が得られた。 G を指数型可解リー群、 D を G のリー環に指数型に作用する G の

自己同型写像から成る指数型可解リー群で、 D は G の内部自己同型群を含むものとする。このとき G の各既約表現 ρ の D 軌道 $D(\rho)$ の $C^*(G)$ における核 $\ker(D(\rho))$ (D 軌道に含まれる既約表現の核の共通部分) が L^1 決定であるための十分条件を、Ungermann の原始イデアルに対する結果の拡張の形で与えた。この条件は軌道法により G のユニタリ双対を余随伴軌道の空間と同一視した上で、群 D のリー環 \mathfrak{d} の作用による、群 G のリー環 \mathfrak{g} の像 $\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{g}$ を含む冪零イデアル \mathfrak{n} に関連する条件として記述されるものである。特に D が G の内部自己同型群に一致する場合は、本研究の結果は Ungermann による先の結果の内一つの別証明を与えることになる。一方、本研究では、上記の十分条件を満たさない余随伴軌道に対応する既約表現で実際に、核が L^1 決定でない例を見つけた。即ち、指数型可解リー群の群環は原始 * 正則とは限らないことが新たに分かったことになる。これらは論文にまとめ学術雑誌に発表した。

(2) ユークリッド空間上の調和解析で基本的な Hausdorff-Young 定理は Kunze によりユニモジュラー、局所コンパクト群上に一般化された。特に群が 1 型の場合、Abstract Plancherel 定理を介して、Hausdorff-Young 定理は群上の L^p フーリエ変換 ($1 < p \leq 2$)、即ち群上の L^p 関数のなす Banach 空間から群のユニタリ双対上の q -Schatten クラス作用素値可測場のなす L^q 空間への連続写像を与える。ただし、 q は p の共役指数とする。この L^p フーリエ変換の作用素ノルムは、古典的な調和解析の結果としてコンパクト群では 1 であり、ベクトル群 R^n の場合は、 p により決まる 1 より小さい定数 A_p の n 乗であることが Beckner により示された。一方、一般の非コンパクトかつ非可換な群においては、ノルムの値が完全に求められた例はまだ少なく、現在に至るまで様々な群を対象としてノルムの評価を中心とする研究が行われている。研究代表者はこれまでスファックス大学の Baklouti 氏との共同研究で群 G がその閉正規部分群とコンパクト部分群の半直積である場合にノルムを調べてきた。本研究課題では引き続き Baklouti 氏との共同研究により、これまでの半直積に関する結果を一般の (半直積とは限らない) コンパクト拡大で与えられる群を対象を拡張した、次の結果を得た。

G を可分、ユニモジュラーな 1 型局所コンパクト群、 N を G のユニモジュラーな 1 型閉正規部分群で商群 G/N がコンパクトであるとする。このとき、 $1 < p < 2$ を満たす指数 p に対して、 G の L^p フーリエ変換のノルム $F^p(G)$ は N の L^p フーリエ変換のノルム $F^p(N)$ 以下であることを示した。また、特に G が N とコンパクト群 K の半直積である場合に、 $F^p(G)$ と $F^p(N)$ が等しくなるための十分条件を 1 つ与えた。具体的には N 上の K 不変な L^1 かつ L^p 関数の列で、各関数の L^p フーリエ変換のノルムがなす数列の極限值が $F^p(N)$ となるようなものが存在する、という条件である。本結果は論文にとりまとめ学術雑誌に発表した。

コンパクト拡大においては、Russo により共役指数 q が偶数の場合に同様のノルム評価 $F^p(G) = F^p(N)$ が与えられているが、本研究結果は Russo の結果を一般の指数 p ($1 < p < 2$) に拡張したものとなる。次に、より精密に、等式 $F^p(G) = F^p(N)$ が成り立つかどうかを考える。半直積とは限らない一般のコンパクト拡大においては等式 $F^p(G) = F^p(N)$ が成り立つとは限らないが、半直積群では等式が成り立たない例は今までみつかっていない。本研究では半直積の場合に等式が成り立つための十分条件を与えたが、一般に半直積群において等式が成り立つかどうかは今後の課題である。

(3) 指数型可解リー群 G において、そのリー環 \mathfrak{g} の実線型形式 f およびリー環 \mathfrak{g} の複素化において f が定める双一次形式について等方的な複素部分リー環 \mathfrak{h} 、モジュラー関数に関連する線型形式 χ をとり、組 (f, \mathfrak{h}, χ) から群 G の複素解析的誘導表現 π を構成する。尚、ここでは \mathfrak{h} と \mathfrak{g} の複素共役空間の和空間が括弧積で閉じているとは限らない、一般の場合を考える。 \mathfrak{h} は \mathfrak{h} と \mathfrak{g} の交わりに対応する部分群 D と f が定める D のユニタリ指標からの誘導表現の部分表現である。このとき、 π が零表現でないための条件と、零表現でない場合に π の既約分解を求めることが問題であるが、Penney の Abstract Plancherel 定理により、 G の各既約表現 ρ において、 (f, \mathfrak{h}, χ) に関して半不変な一般ベクトル (超関数ベクトル) の空間が基本的な情報を与えると考えられている。例えば \mathfrak{h} が実部分リー環の場合、表現 π は単項表現であり常に零でない表現であるが、特に群 G が連結単連結冪零リー群のときは π における半不変超関数ベクトルの空間の次元は \mathfrak{h} の重複度に等しいこと、即ち「超関数の意味でのフロベニウス相互律」、が藤原英徳氏の研究により示された。冪零でない一般の指数型可解リー群の単項表現、複素解析的誘導表現に対して、このような「相互律」の結果を拡張できるかどうかは基本的な問題である。単項表現に限っても、一般の指数型可解リー群において「相互律」が成り立つかどうかは未解決であるが、これまで相互律が成り立つ例は数多く知られている。複素解析的誘導表現に対しては、例えば Penney や Magneron による先行研究や本研究代表者のこれまでの研究において「相互律」が成り立つ例が得られている。

本研究では、Penney や Magneron による複素解析的誘導表現の研究と同様に、半不変一般ベクトルに付随する行列要素を用いた解析を行い、まず 4 次元の完全可解振動子群 (Boydol's group) において、 1 次元の (実リー環でない) 複素部分リー環からの複素解析的誘導表現を調べた。これは正則表現の部分表現であるが、

(例 1) は零表現であるが、 G の正則表現の Plancherel 測度に関し殆どすべての既約表現において半不変な一般ベクトルが 1 次元の空間をなす例、

(例 2) は零でなく、 G の既約表現の無重複な直積分に分解し、正則表現において殆どすべての既約表現に対して従来の定義による「相互律」が成り立つ例、
を得た。これらの結果について論文にまとめ発表した。

次に G が n 次元可換正規部分群 R^n と実数 R の半直積で、 h が 1 次元の複素部分リー環であり、 h と h の複素共役空間の和空間が g の複素化を生成する場合を考える。このときも G の正則表現の部分表現であり、研究代表者のこれまでの研究結果 (Adv. Pure Appl. Math. 6 (2015), no. 2, 113-123 掲載) において、同様の設定の下で相互律が成り立つ例を得ているが、当時の研究で扱わなかった特別な場合を調べ、新たに

(例 3) の既約分解において無重複で現れ、かつ半不変一般ベクトルの空間が 1 次元である既約表現全体と、の既約分解には現れないが半不変一般ベクトルが 1 次元の空間をなす既約表現全体が、それぞれ Plancherel 測度に関して 0 でない集合をなす例、
を得た。即ち零でない表現で実際に従来の定義による「超関数の意味での相互律」と異なる現象がみられる例を見つけたことになる。この結果について論文にまとめ発表した。

このように従来の「相互律」の観点から新しい現象の計算例が得られたことを踏まえて、今後の研究課題は「相互律」の従来の定義を見直し、各既約表現における半不変一般ベクトルの空間と重複度との関係、さらに余随伴軌道との関連を調べ、これらの結果を統一的に理解できるような方法・枠組みを見いだすことである。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Junko Inoue	4. 巻 366
2. 論文標題 Semi-invariant Vectors Associated with Holomorphically Induced Representations of Exponential Lie Groups	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics	6. 最初と最後の頁 79 ~ 101
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-78346-4_6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Junko Inoue	4. 巻 290
2. 論文標題 An Example of Holomorphically Induced Representations of Exponential Solvable Lie Groups	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces. TJC 2017. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics	6. 最初と最後の頁 111 ~ 120
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-26562-5_5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ali Baklouti, Junko Inoue	4. 巻 -
2. 論文標題 The Lp-Fourier Transform Norm on Compact Extensions of Locally Compact Groups	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Fourier Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00041-020-09739-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Junko Inoue, Jean Ludwig	4. 巻 74
2. 論文標題 L1-determined primitive ideals in the C*-algebra of an exponential Lie group with closed non-regular orbits	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Kyushu Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 127 ~ 148
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2206/kyushujm.74.127	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 2件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 井上順子, Ali Baklouti
2. 発表標題 局所コンパクト群のコンパクト拡大におけるLp-Fourier変換のノルムについて
3. 学会等名 日本数学会2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 井上順子
2. 発表標題 可解Lie群の複素解析的誘導表現の既約分解に付随する半不変超関数ベクトルについて
3. 学会等名 2020年度表現論ワークショップ
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Junko Inoue
2. 発表標題 Semi-invariant vectors associated with holomorphically induced representations of exponential Lie groups.
3. 学会等名 6th Tunisian-Japanese Conference Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications in Honor of Professor Takaaki Nomura (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 井上順子
2. 発表標題 群上の L ^p -Fourier 変換のノルムについて：局所コンパクト群のコンパクト拡大に関わるノルムの評価
3. 学会等名 2019年度表現論ワークショップ
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 井上順子
2. 発表標題 指数型可解Lie群の複素解析的誘導表現における半不変超関数ベクトルについて
3. 学会等名 日本数学会2019年度年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Junko Inoue
2. 発表標題 Some examples of holomorphically induced representations of solvable Lie groups
3. 学会等名 5th Tunisian-Japanese Conference, Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 井上順子
2. 発表標題 ある指数型可解リー群の複素解析的誘導表現における半不変超関数ベクトルについて
3. 学会等名 2017年度表現論ワークショップ
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------