

令和 5 年 5 月 25 日現在

機関番号：82723

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2022

課題番号：17K05309

研究課題名(和文)ディリクレ形式によるレヴィ型確率過程の研究

研究課題名(英文)A study of Levy type processes via Dirichlet forms

研究代表者

土田 兼治 (TSUCHIDA, Kaneharu)

防衛大学校(総合教育学群、人文社会科学群、応用科学群、電気情報学群及びシステム工学群)・総合教育学群
・准教授

研究者番号：80466523

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：レヴィ型確率過程をディリクレ形式を用いて研究した。レヴィ型過程を含むような広いクラスの対称マルコフ過程に関する連続とジャンプ型の加法汎関数の対の確率過程に対する大偏差原理を証明し数学専門誌に掲載された。
次に、再帰的な相対論的安定過程に対するシュレディンガー作用素の臨界性について議論し、基底状態を構成し、その有界かつ連続性を証明した。さらに1次元相対論的安定過程の点再帰性も証明した。
最後に、緊密性を持つ対称マルコフ過程に対する加法汎関数の大偏差原理を、スペクトル関数の微分可能性を証明することにより証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

対称マルコフ過程に関する加法汎関数は、そのマルコフ過程の挙動を反映する重要な確率過程のクラスである。本研究において、連続型とジャンプ型の両方の加法汎関数を対にもつ確率過程に対する大偏差原理を得ることができた。これにより、加法汎関数の極限挙動を把握することができ、この結果を特に対称レヴィ型過程に適用して、より具体的な問題に応用するための理論的裏付けを確立できた。
次に、対称マルコフ過程の解析学的側面でもあるフェラー性や強フェラー性、対応するDirichlet空間の埋め込みコンパクト性などにおける結果を得て、シュレディンガー作用素の調和関数の構成に応用できた。

研究成果の概要(英文)：We study Lévy type processes using the theory of Dirichlet forms. We proved the large deviation principle for the pair of continuous and jump-type additive functionals for a wide class of Markov processes, including Lévy-type processes, which was published in an international journal of Mathematics.
Next, we discussed the criticality of the Schrödinger operator for recurrent relativistic stable processes, constructed the ground state, and proved its boundedness and continuity. We also proved the point recurrence of one-dimensional relativistic stable processes.
Finally, we proved the large deviation principle for symmetric Markov processes with tightness property by proving the differentiability of spectral functions.

研究分野：対称マルコフ過程

キーワード：対称レヴィ型確率過程 対称マルコフ過程 ディリクレ形式 大偏差原理

1. 研究開始当初の背景

レヴィ型確率過程はレヴィ過程のジャンプ核が2点間の距離だけでなく、その2点そのものに依存するような確率過程であり、これについて近年、熱核、グリーン核の評価、漸近挙動などが研究され始めていた。そのような研究の流れの中で、レヴィ型確率過程の極限挙動についてはあまり研究がないようであった。特に、対称レヴィ型過程から生成されるシュレディンガー作用素に対するスペクトルの挙動や加法汎関数の極限挙動に関する研究などはなかった。

本研究では対称なレヴィ型確率過程についてディリクレ形式の理論を用いて極限定理を研究しようというものである。ディリクレ形式は対称マルコフ過程を研究する上で非常に強力な道具であるが、それはディリクレ空間とよばれる状態空間上の対称化測度に関して二乗可積分な関数空間のある部分空間を基盤とした理論であり、シュレディンガー作用素のスペクトルの挙動を調べるためには、拡大ディリクレ空間とよばれるディリクレ空間よりも広い空間で考えなければならない。そのために拡大ディリクレ空間の精密な特徴を研究しなければならなかった。

さらに、加法汎関数の大偏差原理の証明においてはゲルトナー・エリスの定理を用いる方法が知られているが、それを用いるためにディリクレ空間、拡大ディリクレ空間の性質、ディリクレ形式に関する半群、レゾルベントのいくつかの解析学的性質を示さなければならなかった。そこで、対称レヴィ型確率過程の加法汎関数の大偏差原理が成り立つための本質的な条件が何であるのかを定式化することに興味があった。

最後に、対称レヴィ型確率過程の一種である相対論的安定過程から生成されるシュレディンガー作用素の臨界性についてはそれが再帰的である場合は全く知られていなかった。これに関連する研究は、竹田雅好氏によって再帰的(1次元)対称安定過程の場合についての研究がある。しかし、対称安定過程が再帰的になるのは1次元だけであるが、相対論的安定過程の場合、再帰的になるのは1次元と2次元の場合があり、特に2次元の場合には対称安定過程の場合の議論をそのまま適用することができないことが知られていた。そのためのアイデアを構築する必要があると感じていた。

2. 研究の目的

対称レヴィ型確率過程を対称ディリクレ形式が生成する対称マルコフ過程の一例として、ポテンシャル論的性質、確率論的性質を研究することを目的とする。特に、この確率過程に対応する加法汎関数の大偏差原理についての研究を行う。このために、マルコフ過程の半群とレゾルベントに対するフェラー性と強フェラー性、ディリクレ空間の埋め込みのコンパクト性、局所的な空間における大偏差原理を大域的な空間における大偏差原理に拡張する方法についての研究を行っていく。

また、再帰的な対称レヴィ型確率過程に対するシュレディンガー作用素の臨界性について研究し、再帰的な場合には通常のグリーン関数が存在せず、ファインマン-カツツ汎関数の有界性などの議論においてグリーン関数を通して考えることができないので、それに変わる方法確立したい。さらに、対称レヴィ過程を含むような広い範囲での再帰的な対称マルコフ過程に対するシュレディンガー作用素の臨界性についての理論を展開することを目的とし、そこから得られる知見を、確率論的には対応する対称マルコフ過程に関するある種の汎関数の極限定理の研究へ、解析学的にはシュレディンガー作用素の調和関数の存在、その漸近挙動の研究に応用していくことを目的とする。

3. 研究の方法

ルジン空間上の対称なボレル右過程という、状態空間も対称マルコフ過程もかなり一般的な設定で考え、ディリクレ形式の理論を用いて、その半群やレゾルベントの解析学的な特徴を研究し、加法汎関数とよばれる確率過程の大偏差原理を研究する。そしてその特別な場合としてレヴィ型確率過程に適用する。さらに、レヴィ型の場合は対応するシュレディンガー作用素の詳しい挙動もわかるので、さらに詳細な特性を研究する。

対称マルコフ過程の生成作用素を主要項とするシュレディンガー作用素のスペクトル下限が、

対応するファインマン・カツ半群の L^p 独立性により、加法汎関数の対数モーメント母関数になることを連続型とジャンプ型の対に対しても証明する。さらに局所的な大偏差原理は比較的容易に得られるが、それを大域的な場合に拡張する方法について研究する。

以上の研究において、対称レヴィ型過程を含むような対称マルコフ過程における加法汎関数の大偏差原理の研究については、University of Washington の Zhen-Qing Chen 氏と共同研究をする。さらに、ディリクレ空間におけるコンパクト性に関する研究を福岡大学の桑江一洋氏と実施する。研究についての情報交換をするために、研究者の招聘、研究集会「マルコフ過程とその周辺」などを実施し、研究連絡を円滑に進めるために、パソコンとその周辺機器の環境を整備する。また、研究上必要となる確率論、解析学、ポテンシャル論、その他様々の知見を得るために、関連する和書、洋書を購入する。

4. 研究成果

本研究により、次の結果が得られた。

- (1) ディリクレ形式の定義域が、基礎となる二乗可積分な関数の空間にコンパクトに埋め込まれるための条件について、竹田雅好氏、田原喜宏氏と共同研究を行い、コンパクト性が成り立つための基礎となる空間の非有界な部分集合についての条件を得た。この結果により、広いクラスの吸収壁ブラウン運動の生成作用素に関する調和関数の構成が可能となった。またシュレディンガー半群がコンパクトになるためのポテンシャルの条件について研究した。
- (2) 対称マルコフ過程のレゾルベントが二重フェラー性を持つときに、その対称マルコフ過程を、状態空間のある集合に制限した部分過程、乗法汎関数による重みをつけた変換、時間変更などの変換において保存されることを、桑江一洋氏、Mila Kurniawaty 氏と証明した。この結果は、レヴィ型確率過程から生成されるシュレディンガー作用素の調和関数の存在を示す上で重要となるものである。
- (3) レヴィ型確率過程の特別な場合とみなせるレヴィ過程の一種である、1次元と2次元の相対論的安定過程のシュレディンガー作用素の臨界性についての結果を得た。1次元と2次元の相対論的安定過程は再帰的であり、通常の意味でのグリーン関数は存在しない。そのようなわけで Feynman-Kac 汎関数の有界性などの研究はほとんどないが、竹田雅好氏によって1次元対称安定過程の場合だけその臨界性と劣臨界性における調和関数に関する結果が得られている。その結果を相対論的安定過程で2次元の場合も含めて拡張した。さらに、1次元相対論的安定過程が点再帰的であることもディリクレ形式の理論を用いて証明した。
- (4) ルジン空間上のボレル右過程から生成される連続と不連続の加法汎関数の対に対する大偏差原理を Zhen-Qing Chen 氏と証明した。これまではブラウン運動、対称安定過程、相対論的安定過程の場合でかつ比較的次元の場合において、この種の大偏差原理は得られていた。ここでは、ある条件を満たす一般的な対称マルコフ過程に対して、対応するシュレディンガー作用素のスペクトル下限が、半群のスペクトル境界の L^p -独立性を通して連続と不連続の加法汎関数の対に関する対数モーメント母関数となることを示し、連続と不連続の両方を含む加法汎関数の大偏差原理を証明できた。この結果は対称レヴィ型過程も含んでおり、当初の予定より広いクラスの確率過程に対する大偏差原理を証明できた。さらに対称レヴィ型過程を含む対称ジャンプ過程に対して、その拡大ディリクレ空間からグリーン緊密な加藤クラスに関する二乗可積分空間への埋め込みがコンパクトであることも証明でき、その応用としてスペクトル関数の微分可能性を証明した。
- (5) 本学研究科(修士)の学生であった陰山墨氏と共同で、ある種の緊密性を持つ対称マルコフ過程から生成されるスペクトル関数の微分可能性とその応用として加法汎関数の大偏差原理を証明した。緊密性を持たない場合は比較的次元の対称マルコフ過程でしかスペクトル関数の微分可能性が成り立たないことが知られているが、緊密性を持つ場合は、状態空間の次元に関係なくスペクトル関数が微分可能であることが確認できた。特に、ある測度に関して時間変更された対称安定過程や非有界な係数を持つような安定過程などに対するスペクトル関数の微分可能性を証明した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件／うち国際共著 1件／うちオープンアクセス 1件）

| | |
|---|---------------------------|
| 1. 著者名 Tsuchida Kaneharu | 4. 巻 72 |
| 2. 論文標題 On a construction of harmonic function for recurrent relativistic α -stable processes | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Tohoku Mathematical Journal | 6. 最初と最後の頁 299-315 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2748/tmj/1593136823 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |
| 1. 著者名 Chen Zhen-Qing, Tsuchida Kaneharu | 4. 巻 373 |
| 2. 論文標題 Large deviation for additive functionals of symmetric Markov processes | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society | 6. 最初と最後の頁 2981 ~ 3005 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/tran/8039 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 該当する |
| 1. 著者名 Takeda Masayoshi, Tawara Yoshihiro, Tsuchida Kaneharu | 4. 巻 54 |
| 2. 論文標題 Compactness of Markov and Schroedinger semi-groups: a probabilistic approach | 5. 発行年 2017年 |
| 3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics | 6. 最初と最後の頁 517-532 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である） | 国際共著 - |
| 1. 著者名 Kurniawaty Mila, Kuwae Kazuhiro, Tsuchida Kaneharu | 4. 巻 57 |
| 2. 論文標題 On the doubly Feller property of resolvent | 5. 発行年 2017年 |
| 3. 雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics | 6. 最初と最後の頁 637 ~ 654 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1215/21562261-2017-0009 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 2件）

| |
|--|
| 1. 発表者名 Kaneharu Tsuchida |
| 2. 発表標題 Green-tight measures of Kato class and compact embedding theorem for symmetric Markov processes |
| 3. 学会等名 Japanese-German Open Conference on Stochastic Analysis 2019 (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Kaneharu Tsuchida |
| 2. 発表標題 Green-tight measures of Kato class and compact embedding theorem for symmetric Markov processes |
| 3. 学会等名 2019年度 確率解析シンポジウム |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Kaneharu Tsuchida |
| 2. 発表標題 Compact embedding theorem for symmetric Markov processes |
| 3. 学会等名 Workshop on Probability at Kansai University |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Kaneharu Tsuchida |
| 2. 発表標題 Criticality of Schroedinger operators for relativistic stable processes |
| 3. 学会等名 The tenth meeting on Probability and PDE (国際学会) |
| 4. 発表年 2018年 |

| |
|-------------------------------------|
| 1. 発表者名 土田兼治 |
| 2. 発表標題 対称マルコフ過程における加法的汎関数の大偏差原理 |
| 3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会 特別講演 |
| 4. 発表年 2018年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|---------------------------|-----------------------|----|
| | | |

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 | | |
|---------|--------------------------|--|--|
| アメリカ合衆国 | University of Washington | | |