

令和 2 年 5 月 13 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2017～2019

課題番号：17K05317

研究課題名（和文）非線形系の解及び解空間の構造の大域的解析の展開

研究課題名（英文）Development of global analysis for solutions of nonlinear partial differential equations

研究代表者

西田 孝明（NISHIDA, TAKAAKI）

京都大学・情報学研究科・名誉教授

研究者番号：70026110

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：非圧縮性粘性流体運動の漸近的な挙動、安定性の解析をするのに、その非圧縮性の拘束条件の困難を避ける為に人工的な圧縮性を導入した Chorin の方法を熱対流問題などに数値解析的に適用するとともにその正当性を考察した。時間無限大での定常解の安定性についてその正当性を証明した。圧縮性粘性流体の平面 Poiseuille 流の不安定性からの周期的進行波が分岐していることを解析的に示した。水平領域を占める非圧縮性粘性流体の自由表面問題の線形化方程式の解の時間減衰が代数関数的であることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

流体運動方程式の解の挙動を大域的に解析することを目指した。その偏微分方程式系が非線形であり物理的な無次元化などのパラメータをいくつか含む。それらの解の挙動、安定性を解明したいが、系の非線形性やパラメータの値に依存して解は複雑に変化する。特別の場合を除いて解が陽に解析的に求められないために、パラメータによる特異振動や分岐理論などによる解析とともに計算機援用解析が必要になる。熱対流問題、非圧縮性粘性流体運動などでのパターン形成とそれらの安定性を調べるのに人工的圧縮性を導入し、数値的に調べるとともに、解析的にもその正当性を示した。

研究成果の概要（英文）：(1) Analysis on asymptotic behaviors and their stability of incompressible viscous fluids is our subject. To avoid the constraint of incompressibility Chorin (1976) introduced an artificial compressibility in the mass conservation law. We examined its applicability to the pattern formations and their stability in heat convection problems. We justified the method analytically for the limit of compressibility parameter tending to zero. (2) We proved that periodic traveling waves bifurcate from the instability of the plane Poiseuille flow of compressible viscous fluids for much smaller Reynolds number compared with incompressible case. (3) We proved that the solutions of free surface flow of linearized Navier-Stokes equations in the infinite horizontal layer decay as an algebraic rate.

研究分野：非線形偏微分方程式

キーワード：非線形偏微分方程式 解析 自由表面問題 Navier-Stokes equation 圧縮性粘性流体運動方程式 熱対流問題 大域的解析 計算機援用

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

## 1. 研究開始当初の背景

### (1) Oberbeck-Boussinesq 方程式による熱対流問題

水平な領域での平衡解(熱伝導解)からの分岐として、Rayleigh 数が臨界 Rayleigh 数を少し越えたところでのパターン形成、分岐構造、安定性などはかなり分かってきた。分岐理論の適用を越えたところでのその分岐構造を調べるには数値計算が必要であり、その安定性を調べる Chorin の方法がある。数値的に適用してきたが、それを解析的に正当化したかった。

(2) 圧縮性粘性流体の平面 Poiseuille 流の線形安定性解析で、不安定が起こることを解析的に示していた。その不安定が Hopf 分岐を起こすことを示唆していた。

(3) Navier-Stokes 方程式の水平な無限領域での自由表面問題で、表面張力のみが働く場合には、時間大域的な解の存在証明、漸近挙動が知られていなかった。

## 2. 研究の目的

数理科学に現れる諸問題は、主に非線形の常微分あるいは偏微分方程式系の形で定式化される。それらの自然に現れ典型的な非線形系の数学的構造を解明する事を目的とする。即ち、解の定性的性質、構造、それらの安定性を調べる事から進んで、解空間の構造、構造安定性、その変化を自然なパラメータに依存した形で大域的に解析したい。力学系、双曲型保存則、流体方程式系等を主な対象として、線形近似や弱非線形理論などによる扱いを越えているために未解決である重要な問題を明確に定式化し、その非線形性と物理的に自然なパラメータに着目して、解空間における定常解、周期解のみならず一般の解の時間的遷移過程を調べるための解空間の大域的な特異性、構造とその変化を解明する。

## 3. 研究の方法

非線形偏微分方程式系の解・解空間の大域的解析をめざす時、解空間でのパラメータによる解の分岐構造を調べることは、基本的な問題であり、分岐理論はその解析のための有力な方法である。しかしながら、それを具体的な問題へ応用するためには、単純分岐の場合でも証明の困難な条件が仮定されている。即ち、分岐を考察する点(解空間での点、即ち、解)において線形化した系のスペクトルに関する情報が必要である。しかしながら、この線形系のスペクトルの様子はもちろんのこと、この線形系自身もあらかじめ与えられたものではない。何故なら、この点(解)自身も、自明解の場合を除いては、非線形系を解いて求めなければならないものであるから。このように非線形系の解をパラメータの値に応じて構成的に求めるには、解析的に求められる場合を除いて、計算機援用解析の方法が必須である事になる。更に、その結果の保証を計算機援用証明法で行う事もめざす。解析学にこれらの方法を取入れ得る状況になって来た。こうして現在の解析学だけでは取扱えない部分を含む問題に対して、計算機援用解析の方法を含んだ大域的な解析学として発展させる。

## 4. 研究成果

(1) 非圧縮性粘性流体運動方程式の定常解(形成されるロール型や六角形型のパターン等)を求める解析的および数値解析的方法として Chorin によって導入された(1967)のは、方程式系の質量保存則に人工的圧縮性に当たる項(小さいパラメータを含む圧力の時間微分項)を加えて、その方程式系の時間発展の極限として求める方法である。それによって Oberbeck-

Boussinesq 方程式で記述される熱対流問題の例で数値的に定常解を得ていた。両者の方程式系の定常解は、その摂動項の入れ方から同じ集合を成している事がわかるが、すべての定常解がこの方法で得られるわけではない。

定常解の安定性、不安定性に注目して、この方法の数値計算による有効性を確認するとともに、パラメーターが小さい時に解析的にその正当性を示した。パラメーターを小さくする極限を考察する特異摂動問題であり、線形化した系のスペクトルを特異な摂動部分と通常摂動部分とに分けて、詳しく解析することが必要であった。熱対流の Oberbeck-Boussinesq 方程式の場合 (2017) と Navier-Stokes 方程式の場合 (2018) を詳述した。定常分岐の解析においてもこの方法が適用できることも示唆される。

(2) 粘性流体の平面 Poiseuille 流の線形安定性解析については、非圧縮性 (Mach 数は 0) の場合には以前より流体力学的、数値計算的に多くの研究がある。しかしその線形不安定性の起こる Reynolds 数は大きく (臨界 Re 数が数値計算されていておおよそ 5772)、Reynolds 数がそれを越えた時の流体の様子は良く解析されていない。ところが 圧縮性粘性流体の場合の平面 Poiseuille 流の線形不安定性は Mach 数が小さくない時 (Ma 数がおおよそ 2.1 以上) には、Reynolds 数が、非圧縮性粘性流体の場合よりはるかに小さい時 (Re 数がおおよそ 11) にも起こる事を見つけ証明していた (2015)。この不安定性は、複素共役の 2 個の固有値が虚軸を横切る事により起こる。即ち、この不安定性は時間周期的な Hopf 分岐を示唆する。この分岐を空間周期的な進行波として定式化し直して、非線形進行定常波が生成される事を、解析的に証明した (2019)。圧縮性粘性流体方程式系における、質量密度に関する方程式 (質量保存則) の非線形性のために分岐の一般論を適用する事ができず、Lyapunov-Schmidt 分解においても特別の反復による取扱いが必要であった。この方法は、質量保存則の非線形性を扱わねばならない圧縮性粘性流体の分岐問題の取扱いに有力な方法である。

(3) Navier-Stokes 方程式で記述される非圧縮性粘性流体運動の自由表面問題を考察した。水平領域を満たす流体の上面が自由であり表面張力が働いている時の運動は、方程式の半線形性のみならず表面したがつて流体領域が時刻とともに変化する非線形性を持つ。その初期境界値問題は、時間局所的には解かれている。その時間大域的な可解性、解の挙動を調べる為に、系を水平な帯状の領域に変換する。変換された方程式は、複雑な非線形方程式系になる。始めとしてその線形化方程式系の解の構成とその時間大域的な挙動を解析した。解の時間による減衰を調べ、時間の代数関数的な減衰評価を得た。重力と表面張力が共に働いている場合 (Beale-Nishida, 1986) と異なり、表面張力のみの場合には表面を表す関数の時間的減衰が遅いことが示せた。この評価を用いることによって上記 Beale-Nishida にあるエネルギー法と合わせることにより、元の初期境界値問題の時間大域的な可解性を小さな初期値に対して示す準備ができたことになる。水平領域にある流体の自由表面問題で表面上を一樣に風が吹いている現象、あるいは上下二層の流体で上の流体が一樣に動いている問題の解析は今後の課題であるが、そのモデルとして表面上での風の代用として水平方向の stress を与える時の解析を始めた。線形化した方程式のスペクトルを調べて stress の大きさにより表面が不安定化することを数値計算により確かめた。この分岐解析を進めることが次の計画である。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 J. Thomas Beale, Takaaki Nishida and Yoshiaki Teramoto	4. 巻 B77
2. 論文標題 Decay of solutions of the Stokes system arising in free surface flow on an infinite layer	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 RIMS (Kyoto University) Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 1, 20
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Yoshiyuki Kagei and Takaaki Nishida	4. 巻 231
2. 論文標題 Traveling Waves Bifurcating from Plane Poiseuille Flow of the Compressible Navier-Stokes Equation	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Archive Rational Mechanics and Analysis	6. 最初と最後の頁 1, 44
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00205-018-1269-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yoshiyuki Kagei, Takaaki Nishida, Yuka Teramoto	4. 巻 264
2. 論文標題 On the spectrum for the artificial compressible system	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 897, 928
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2017.09.026	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yoshiyuki Kagei and Takaaki Nishida	4. 巻 19
2. 論文標題 On Chorin's method for stationary solutions of the Oberbeck-Boussinesq equations	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Fluid Mechanics	6. 最初と最後の頁 345, 365
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00021-016-0284-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 7件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 Takaaki Nishida
2. 発表標題 Free surface problems of viscous fluids in a horizontal domain
3. 学会等名 偏微分方程式の臨界現象と正則性理論および漸近解析、京都大学数理解析研究所（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takaaki Nishida
2. 発表標題 Decay of Surface Waves of Navier-Stokes Equations
3. 学会等名 岐阜数理科学研究会（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takaaki Nishida
2. 発表標題 Artificial Compressible Systems for the Incompressible Viscous Fluids
3. 学会等名 成功大学、機械工学セミナー、台南（台湾）（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takaaki Nishida
2. 発表標題 Decay of Surface Waves of Navier-Stokes Equations
3. 学会等名 Colloquium, Department of Mathematics, Cheng-Kung University, Tainan(Taiwan)（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Takaaki Nishida
2. 発表標題 Heat Convection Problems of Compressible Atmosphere and Its Incompressible Limit
3. 学会等名 Colloquium, National Taiwan University (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takaaki Nishida
2. 発表標題 On Chorin's Method, Artificial Compressible System for the Incompressible Viscous Fluids
3. 学会等名 NCTS (National Taiwan University) PDE Seminar (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Takaaki Nishida
2. 発表標題 Instability of compressible Poiseuille flow and traveling waves
3. 学会等名 The last 60 years of Mathematical Fluid Mechanics : In Honor of Professors R. Finn and V. Solonnikov (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----