

令和 5 年 5 月 8 日現在

機関番号：18001

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2022

課題番号：17K05335

研究課題名(和文) 平坦構造の一般化とモノドロミ保存変形

研究課題名(英文) Generalization of flat structure and isomonodromic deformation

研究代表者

眞野 智行 (Mano, Toshiyuki)

琉球大学・理学部・教授

研究者番号：60378594

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：「平坦構造」と呼ばれる幾何構造について、線形微分方程式との関係を基礎に置いた研究を行った。この研究について次のような成果を得た。

(1) パンルヴェ方程式と呼ばれる非線形微分方程式の解と平坦構造のポテンシャルベクトル場と呼ばれる対象との間に代数的および解析的な記述による対応関係を与えた。(2) 複素鏡映群に対する平坦構造の構成を用いて、複素鏡映群の鏡映面から定まる超平面多重配置の自由性を証明した。これは本研究の他分野への応用による成果である。(3) 本研究課題の研究結果をまとめたものを主な内容とする専門書を出版した。この本では特に、平坦構造について従来とは異なる新しい理論構成が与えられた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の最大の特色は、「平坦構造」と「線形微分方程式」という一見異なる分野の対象について、本質的に同じ対象であるという観点から研究を行うことにある。その結果として、パンルヴェ方程式と呼ばれる線形微分方程式の解と平坦構造のポテンシャルベクトル場と呼ばれる対象とのいくつかの面で新しい対応が明らかになった。また、複素鏡映群に対する平坦構造の構成は「超平面配置」という分野の未解決問題の解決に応用された。さらに、本研究の成果をまとめたものを主な内容とする専門書を出版した。この本では、平坦構造について従来とは異なる新しい理論構成が与えられている。今後この新しい理論構成を基礎とした研究の進展も期待される。

研究成果の概要(英文)：We studied a kind of geometric structure called 'flat structure' based on its relationship with differential equations. We obtained the following results:

(1) We gave a correspondence between solutions to the Painleve equations (which are nonlinear differential equations) and potential vector fields of flat structures in terms of algebraic and analytic descriptions. (2) We gave a proof of freeness of hyperplane multi-arrangements defined by reflections of a complex reflection group. This proof is an application of our construction of a flat structure associated with a complex reflection group. (3) We published a book which mainly explained our research findings. Particularly, this book contains a new framework on the theory of flat structures.

研究分野：複素領域上の微分方程式

キーワード：線形微分方程式 平坦構造 モノドロミー

1. 研究開始当初の背景

1970年代後半より、齋藤恭司氏は楕円曲線の”周期”の理論の一般化を目指して、孤立特異点の変形理論を対象として、原始形式の理論と変形のパラメータ空間上の平坦構造の理論を創始した。実鏡映群の軌道空間上の平坦構造が最初の基本的な具体例である。その後1980年代になって B. Dubrovin は数理物理に端を発する WDVV 方程式の幾何学的理解を動機として(齋藤とは独立に)フロベニウス多様体の概念を導入した。Dubrovin によるフロベニウス構造と齋藤による平坦構造は実質的に同等の概念である。

一方、筆者は複素領域上の線形微分方程式のモノドロミー保存変形やパンルヴェ方程式を対象として研究を行ってきたが、自由因子に沿って特異点を持つパップ系の構成を動機として加藤満生および関口次郎と共同研究を行い、大久保型方程式のモノドロミー保存変形について変形のパラメータ空間上に平坦構造が導入できることを示した。これは理論的には C. Sabbah による(計量を仮定しない)平坦構造の概念に基づいている。我々は(計量を仮定しない)平坦構造に対して一般 WDVV 方程式を導入し、その解(ポテンシャルベクトル場と呼ばれる)によって平坦構造を記述する定式化を与えた。その応用として、一般 WDVV 方程式と大久保型方程式のモノドロミー保存変形との同値性(3次元の場合には第6パンルヴェ方程式との同値を与える)・複素鏡映群の軌道空間上の平坦構造の構成・第6パンルヴェ方程式に対するポテンシャルベクトル場の具体的な記述などの結果を得た。本研究ではこれらの結果を足掛かりとして、線形微分方程式のモノドロミー保存変形と平坦構造との関係についてさらに深化させた研究を行う。

2. 研究の目的

筆者は複素領域上の線形微分方程式のモノドロミー保存変形やパンルヴェ方程式などについて研究を行ってきた。特に近年の加藤満生および関口次郎との共同研究において、齋藤恭司による平坦構造あるいは B. Dubrovin によるフロベニウス構造の一般化と大久保型微分方程式のモノドロミー保存変形との関係について明らかにした。本研究課題ではこの関係についてさらに深く研究を進める。この対象は一見異なる分野を密接に結びつけるものであり、本研究ではパンルヴェ方程式や可積分系・平坦構造に関わる特異点の変形理論・(複素)鏡映群の表現論・数理物理など関連する諸分野について新たな角度からの知見を得ることを目的とする。より具体的には、以下のことを明らかにすることが目的である。

(1)半単純でない平坦構造と一般大久保型方程式との関係。上で述べた結果は、半単純な平坦構造に関するものであり、対応する大久保型方程式は確定特異点のみを持つ。そこでこの対応を半単純とは限らない平坦構造と不確定特異点を持つ線形微分方程式との対応に一般化することを試みる。

(2)高階パンルヴェ方程式の代数解の構成。加藤満生および関口次郎との共同研究の結果として、3次元半単純平坦構造と第6パンルヴェ方程式の解との対応関係が得られている。そこでこれを4次元以上の半単純平坦構造と高階パンルヴェ方程式との対応に一般化することを試みる。さらに、階数の大きい複素鏡映群に対する平坦構造のポテンシャルベクトル場から対応する高階パンルヴェ方程式の代数解を構成する。

(3)複素鏡映群の平坦構造と特異点の変形理論との関係。平坦構造の起源の1つは特異点の変形理論である。(実鏡映群ではない)複素鏡映群については特異点との関係がほとんど分かっていない。このことについて明らかにしたい。

(4)モノドロミー保存変形の関数と平坦構造との関係。線形微分方程式のモノドロミー保存変形の理論における重要な量として関数と呼ばれるものがある。平坦構造と大久保型方程式の対応を基にして、平坦構造と関数との関係を調べる。これは可積分系の研究にとっても重要な課題となる可能性がある。

(5)多項式ポテンシャルベクトル場の分類。フロベニウス構造の場合には多項式ポテンシャルは実鏡映群に対する平坦構造から得られるものに限定されることが知られている。一方、(計量を仮定しない)平坦構造にまで枠組みを広げると、多項式ポテンシャルベクトル場であって複素鏡映群に対する平坦構造からは得られないものの例が見つかった。これは新しい現象であり、(計量を仮定しない)平坦構造の場合に多項式ポテンシャルベクトル場を分類することは基本的かつ興味深い問題である。

3. 研究の方法

上で述べた具体的な問題について、研究の進展状況に応じてそのうちのいくつかの問題を選び取り組む。もし、研究遂行上の困難に突き当たるなどで時間が必要であるとか、差し当たりそれ以上の進展は望めないなどといった場合は残っている別の問題に取り組むなど、研究計画の変更によって柔軟に対応する。また、上記の問題のいくつかは連携研究者など他の研究者の研究内容と密接な関連があるので、それらの研究者と密接な連絡を取りながら研究を進める。さらに必要があれば、共同研究を行う。その他に、学会や研究集会に参加することにより、他の研究者の研究動向に注意し、関連する結果があれば議論を行うことや、こちらの研究成果を積極的に発表して興味を持った研究者と議論を行うことも、今後の研究の進展において重要である。研究遂行過程において、複雑な数式計算などを必要とする場合は、計算機を利用して効率的に研究を進める。

4. 研究成果

上で述べた問題のうち、いくつかのものについて解決することができた。また、研究開始当初には問題として認識されていなかったが、その後の研究の進展の中で認識されてきた問題の解決や、平坦構造についての新しい理論構成などの成果が得られた。以下ではそれらの成果についてもう少し詳しく述べる。

(1) 連携研究者である川上拓志との共同研究('Regular flat structure and generalized Okubo system', *Comm. Math. Phys.*, 369 (2019), 403-431)において、半単純とは限らない正則平坦構造と(川上により導入された)一般大久保型方程式との対応を確立し、4次元正則平坦構造と第2~第6 パンルヴェ方程式の解との間の対応について明らかにした。3次元正則平坦構造と第4~第6 パンルヴェ方程式の対応が存在することは海外の研究者(A. Arsie, P. Lorenzoni)による先行研究によって知られていたが、第2および第3 パンルヴェ方程式と4次元正則平坦構造との関係を明らかにしたのは全く新しい結果である。また、この研究は平坦構造と可積分系との関連において今後重要性を持つであろうと思われる。

(2) T. Hoge, G. Roehrl, C. Stump との国際共同研究('Freeness of multi-reflection arrangements via primitive vector fields', *Adv. Math.*, 350 (2019), 63-96)において、複素鏡映群に対する平坦構造を用いて、複素鏡映群の鏡映面から定まる超平面多重配置の自由性を証明した。Hoge, Roehrl, Stump は超平面配置の研究者であり、この成果は異分野間の共同研究の結果とも言える。本研究課題の主対象である複素鏡映群に対する平坦構造が、(他分野の問題である)超平面多重配置の自由性の証明に用いられたということは、本研究課題の学術的価値と波及効果を示す点でも重要である。

(3) 3次元フロベニウス多様体に対して、フロベニウスポテンシャルの分岐点集合の周りでの解析的表示を与え、それに対応する第6 パンルヴェ方程式の超越解の関数の平坦座標系による表示を与えた('Potential vector fields and isomonodromic tau functions in terms of flat coordinates', *De Gruyter Proceedings in Math.*, 2019, 327-342)。この結果は、フロベニウスポテンシャルの解析的表示と関数の解析的表示という双方の面からみても興味深いものであり、さらにそれらの関係を明示的に与えたという点で、今後の研究において重要性を持つであろうと考えられる。

(4) 連携研究者である加藤満生および関口次郎との共同研究で、第6 パンルヴェ方程式の代数解に対応する3次元半単純平坦構造のポテンシャルベクトル場の新しい具体例をいくつか構成した。これはフロベニウス計量を持たないF-多様体の新しい例を与えるものにもなっており、例えばA. Basaliev およびC. Hertlingによる論文 '3-dimensional F-manifolds', *Lett. Math. Phys.* 111 (2021)で引用されている。

(5) 本研究課題の研究結果をまとめたものを主な内容とし、それに関係する理論や諸概念について入門的な部分から解説した専門書(「平坦構造と複素鏡映群・パンルヴェ方程式」, 森北出版, 2022年)を出版した。しかしこの本は単なるまとめだけでなく、執筆過程において平坦構造について新しい基本的な2つの概念「原始ベクトル場を持つアフィン直線束と自由因子からなる3つ組 (M, D, \cdot) 」と「3つ組 (M, D, \cdot) に対する大久保-齋藤ポテンシャルの空間」が導入された。この2つの概念を基礎として、平坦構造について全く新しい理論構成が展開されている。この新しい理論構成を用いた今後の研究の可能性も期待され、この本は平坦構造およびその周辺の諸分野に関する基本文献の1つとなるのではないかと期待される。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 5件）

1. 著者名 Kato Mitsuo, Mano Toshiyuki, Sekiguchi Jiro	4. 巻 16
2. 論文標題 Flat Structure on the Space of Isomonodromic Deformations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3842/SIGMA.2020.110	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Torsten Hoge, Toshiyuki Mano, Gerhard Roehrl, Christian Stump	4. 巻 350
2. 論文標題 Freeness of multi-reflection arrangements via primitive vector fields	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 63-96
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.aim.2019.04.044	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Mano Toshiyuki	4. 巻 -
2. 論文標題 Potential vector fields and isomonodromic tau functions in terms of flat coordinates	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 "Complex Differential and Difference Equations" in the series De Gruyter Proceedings in Mathematics	6. 最初と最後の頁 327-342
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/9783110611427-012	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kato Mitsuo, Mano Toshiyuki, Sekiguchi Jiro	4. 巻 -
2. 論文標題 Solutions to the extended WDVV equations and the Painleve VI equation	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 "Complex Differential and Difference Equations" in the series De Gruyter Proceedings in Mathematics	6. 最初と最後の頁 343-364
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/9783110611427-013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hiroshi Kawakami, Toshiyuki Mano	4. 巻 369
2. 論文標題 Regular Flat Structure and Generalized Okubo System	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 403-431
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-019-03330-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Masao Ishikawa, Toshiyuki Mano, Teruhisa Tsuda	4. 巻 363
2. 論文標題 Determinant structure for tau function of holonomic deformation of linear differential equations	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1081-1101
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-018-3256-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Mitsuo Kato, Toshiyuki Mano, Jiro Sekiguchi	4. 巻 38
2. 論文標題 Flat structure and potential vector fields related with algebraic solutions to Painleve VI equation	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Opuscula Mathematica	6. 最初と最後の頁 201-252
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7494/OpMath.2018.38.2.201	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計12件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 Toshiyuki Mano
2. 発表標題 Period of primitive forms, the space of Okubo-Saito potentials and the sixth Painleve equation
3. 学会等名 Painleve Equations: From Classical to Modern Analysis (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Toshiyuki Mano
2. 発表標題 Flat structures on solutions to the sixth Painleve equation
3. 学会等名 Web-Seminar on Painleve Equations and related topics (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 眞野智行
2. 発表標題 複素鏡映群の平坦不変式と多重鏡映面配置の自由性
3. 学会等名 日本数学会九州支部例会・特別講演 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Toshiyuki Mano
2. 発表標題 Flat structure on the orbit space of a complex refraction group
3. 学会等名 Silver Workshop: Complex Geometry and Non-Commutative Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Toshiyuki Mano
2. 発表標題 Analytic representation of potential vector fields and isomonodromic tau functions
3. 学会等名 Complex differential and difference equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Toshiyuki Mano
2. 発表標題 Flat structure on the orbit space of a complex reflection group
3. 学会等名 Matroids, Reflection Groups, and Free Hyperplane Arrangements (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 眞野智行
2. 発表標題 パンルヴェ方程式と平坦座標
3. 学会等名 超幾何ワークショップ
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 眞野智行
2. 発表標題 パンルヴェ方程式と平坦座標
3. 学会等名 第2回古典解析・徳島研究会 ~パンルヴェ首相百年記念~
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Toshiyuki Mano
2. 発表標題 Potential vector fields associated with solutions to Painleve equations
3. 学会等名 Conformal field theory, isomonodromy tau-functions and Painleve equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 眞野智行
2. 発表標題 複素鏡映群に関する平坦構造と多重鏡映面配置の自由性
3. 学会等名 研究会「不変式・超平面配置と平坦構造」(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 眞野智行
2. 発表標題 平坦構造の一般化と大久保型方程式のモノドロミ保存変形
3. 学会等名 第69回 Encounter with Mathematics (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Toshiyuki Mano
2. 発表標題 Flat structures and Painleve equations
3. 学会等名 The XXVth International Conference on Integrable Systems and Quantum symmetries (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 眞野 智行	4. 発行年 2022年
2. 出版社 森北出版	5. 総ページ数 416
3. 書名 平坦構造と複素鏡映群・パンルヴェ方程式	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	鈴木 貴雄 (Suzuki Takao) (60527208)	近畿大学・理工学部・准教授 (34419)	
連携研究者	川上 拓志 (Kawakami Hiroshi) (00646854)	青山学院大学・理工学部・助教 (32601)	
連携研究者	関口 次郎 (Sekiguchi Jiro) (30117717)	東京農工大学・工学研究科・教授 (12605)	
連携研究者	加藤 満生 (Kato Mitsuo) (50045043)	琉球大学・教育学部・名誉教授 (18001)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
ドイツ	ルール大学ボーフム	ベルリン自由大学	ハノーファー大学