

令和 4 年 6 月 13 日現在

機関番号：32619

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05336

研究課題名(和文)pラプラシアン固有値問題と関連する楕円積分の研究

研究課題名(英文)Study on eigenvalue problems of the p-Laplacian and related elliptic integrals

研究代表者

竹内 慎吾 (Takeuchi, Shingo)

芝浦工業大学・システム理工学部・教授

研究者番号：00333021

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題では代表的な非線形微分作用素であるpラプラシアンについて、固有値問題とそれに関連する楕円積分の研究を行った。具体的には1次元pラプラシアンの固有関数である一般化三角関数と一般化双曲線関数を用いて楕円積分・ヤコビ楕円関数・算術幾何平均と円周率の計算公式・倍角公式などの古典的な諸概念を一般化し、その特殊関数としての新たな可能性を明らかにしてきた。従来の非線形微分方程式の研究では一般にはこうした数論的側面を探ることはなされておらず、pラプラシアンの固有関数についてこれまでにない特徴ある研究成果が数多く得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

微分方程式の研究は諸科学の法則に従って導かれた方程式について解の適切性や漸近挙動を調べることが本来の目的であった。現在ではそのような「由緒正しい」とは限らない方程式や、解の多重存在や高次元での爆発現象などの一見非現実的な性質も数学的に重要な問題であると認識されており、多くの解析手法が開発され続けている。しかし非線形微分方程式の理論は数学全体の中では比較的新しい研究対象であり、他分野の数学を活かす余地がまだ存在すると思われる。本研究課題では、代表的な非線形微分作用素であるpラプラシアンについて、特殊関数論や数論に近い純粋な数学的性質を調べることにより、従来の研究手法では得られない知見を獲得した。

研究成果の概要(英文)：In this research project, we studied eigenvalue problems related to the p-Laplacian, a representative nonlinear differential operator, and related elliptic integrals. Specifically, by using generalized trigonometric functions and generalized hyperbolic functions, which are eigenfunctions of the 1D p-Laplacian, we have generalized various classical concepts such as elliptic integrals, Jacobi elliptic functions, arithmetic-geometric mean and calculation formulas of pi, and double angle formulas, and clarified new possibilities as special functions. The research of conventional nonlinear differential equations has revealed new possibilities. Conventional research on nonlinear differential equations has not generally explored such number-theoretic aspects, and many unique research results on eigenfunctions of the p-Laplacian have been obtained.

研究分野：非線形微分方程式

キーワード：pラプラシアン 固有値問題 一般化三角関数 一般化双曲線関数 一般化ヤコビ楕円関数 一般化完全楕円積分 倍角公式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

微分方程式の研究は、諸科学の法則に従って導かれた方程式について、解の適切性や漸近挙動を調べることがその本来の目的であった。現在では、そのような "由緒正しい" とは限らない方程式や、解の多重存在や高次元での爆発現象などの一見非現実的な性質も数学的に重要な問題であると認識されており、多くの解析手法が開発され続けている。しかしながら非線形微分方程式の理論は数学全体の中では比較的新しい研究対象であり、他分野の数学を活かす余地がまだまだ存在するのではないかと思われる。そこで本研究課題は、代表的な非線形微分作用素である p ラプラシアン固有関数と固有値について、特殊関数論や数論に近い純粋な数学的性質を調べることにより、非線形微分方程式の従来の研究手法では得られない知見を獲得する。

2. 研究の目的

本研究は、代表的な非線形微分作用素である p ラプラシアンについて、固有値問題とそれに関連する楕円積分の研究を行う。研究代表者はこれまで、1次元 p ラプラシアンの固有関数である "一般化三角関数" を用いて楕円積分・ヤコビ楕円関数・算術幾何平均と円周率の計算公式・三角関数の倍角公式などの古典的な諸概念を一般化し、その特殊関数としての新たな可能性を明らかにしてきた。本研究では加法定理・多次元の問題への応用・諸定数の計算公式の開発を目指し、得られた知見を現代の非線形微分方程式の研究に活かす。従来の非線形微分方程式の研究では、一般にはこうした数論的側面を探ることはなされておらず、これまででない特徴ある研究成果が得られると期待される。

3. 研究の方法

一般に作用素の性質を知るうえではその固有値問題が重要となる。例えば(適当な境界条件下における)1次元ラプラシアンではその固有関数は三角関数である。この類推で1次元 p ラプラシアンに関するある初期値問題の一解を一般化正弦関数といい、その半周期を一般化円周率、導関数を一般化余弦関数という。これらは $p=2$ のときは通常正弦関数、円周率、余弦関数と一致する。またこれらの関数や定数は p ラプラシアンの固有値と固有関数を表現するのに便利で、A.Elbert, P.Lindqvist, P.Drabek, P.Manasevich などをはじめとする多くの微分方程式の研究者によって、50年ほど前から分岐問題や振動問題の研究に用いられている。しかし、通常三角関数に比べその性質についてはほとんどわかっていない。例えば三角関数が満たすピタゴラスの定理に相当する等式は成り立つが、加法定理に相当する等式は特別な場合を除いて知られていない。本研究では、一般化三角関数の性質を詳しく研究し、非線形微分方程式への応用の可能性を問う。これまでの研究によればその可能性は十分高いと考えている。

4. 研究成果

2017年度の研究成果は次のとおりである：(1)一般化不完全楕円積分に対するルジャンドル関係式の導出；(2)一般化三角関数の非局所境界値問題への応用；(3)一般化三角関数の積分公式の開発。(1)については、1876年のA.Cayleyの古書に不完全楕円積分に関するルジャンドル関係式に関する記述があることがわかったので、これを手掛かりに一般化不完全楕円積分への一般化を行った。この途中結果を8月に東北大で行われたワークショップにおいて発表し、この分野の第1人者であるM.Vuorinen氏から好意的なコメントを頂いた。(2)については、流体力学に現れるプリミティブ方程式に由来する非局所境界値問題に対して、そのすべての正值解を一般化三角関数で記述できることを証明した。一般化三角関数は p ラプラシアンの固有関数であるので、 p ラプラシアンを含む方程式に応用されることがほとんどであるが、この結果は p ラプラシアンを陽に含まない方程式についてもその解を一般化三角関数ですべて書き下せる例となっている。この成果は、日本数学会年会とRIMS研究集会で報告し、論文にまとめて投稿し後年出版された。(3)は大学院生との共同研究である。三角関数に対するウォリスの公式を一般化三角関数に対して一般化した。特に一般化円周率(レムニスケート定数も含む)の積公式も得ることができた。この結果は大阪府立大学でのセミナーで報告し、(2)の結果とともに論文にまとめて投稿し後年出版された。その他の実績として、11月にRIMSにおいて共同研究(公開型)「実領域における常微分方程式研究の継承と革新」を開催した。

2018年度の研究成果は以下のとおりである：(1)一般化三角関数の応用；(2)一般化三角関数の倍角公式の開発。(1)について述べる。流体力学に現れるプリミティブ方程式に由来する非局所境界値問題に対して、そのすべての正值解を一般化三角関数で表現できることを前年度に証明している。当該年度はその解表示を用いて、正值解の最大点の位置がある種のベータ分布の中央値に関係して評価されることを証明した。また、 p ラプラシアン版の L^q リャプノフ不等式を

導出し、その最適定数と等号を満たす関数を一般化三角関数を用いることで具体的に表現することに成功した。これらの成果は研究室学生との共同研究として日本数学会や RIMS 共同研究で発表し、論文にまとめて投稿し後年出版された。次に(2)について述べる。一般化三角関数は三角関数の一般化であるから、加法公式や倍角公式のような等式が成立するのかどうかは極めて興味深い問題である。これまでは三角関数やレムニスケート関数などの古典的なものと D. Edmunds 等によって 2012 年に発表された特殊な場合についてのみこれらの公式が知られていた。当該年度は研究代表者が以前発見した、異なるタイプの一般化三角関数の間に成り立つ横断的な倍角公式を用いることで、既知の結果からこれまで知られていなかった別の場合の公式を導けることを示し、二つの新たな場合に関する公式を得ることに成功した。これらの成果は研究室学生との共同研究として論文にまとめて投稿し後年出版された。

2019 年度の研究成果は以下のとおりである：(1)一般化三角関数の応用；(2)一般化三角関数の倍角公式の開発。(1)について述べる。三角関数に関する多くの有名な不等式が一般化三角関数を用いて一般化されているが、レッドヘッファー不等式についてはこれまで(1パラメータも含めて)その方向の研究がなかった。これはこの不等式が正弦関数の無限積展開を用いて証明されるのが標準的で、対応するものが一般化三角関数では知られていないことに起因すると考えられる。研究代表者は院生との共同研究で、無限積を用いない方法でこれを一般化することに成功した。また、H. Melkonian 氏との共同研究では、シンク関数についてのディリクレ積分やその周辺の公式を 2 パラメータの一般化三角関数を用いて一般化し、さらにポール積分不等式に関連するその L^m ノルムの m に関する漸近展開を得た。これは通常のシンク関数に関する Borwein-Borwein-Leonard(2010), Kerman-Ol'hava-Spektor(2015)の結果の一般化にあたる。これらの成果はそれぞれ論文にまとめて投稿し後年出版された。次に(2)について述べる。一般化三角関数は三角関数の一般化であるから、加法公式や倍角公式のような等式が成立するのかどうかは極めて興味深い問題である。研究代表者はすでに公式が知られているパラメータをすべて調べ上げ、そのうえで新たにいくつかのケースについて公式を得た。特に Ramanujan がレムニスケート関数を拡張したある種の関数について、大同大学の篠原主勲氏(2017)は偶発的に公式を見つけていたが、研究代表者はそれに発見的な証明を与え、さらにそれを基礎として別のパラメータに関する公式を導いた。この成果は論文にまとめて投稿し後年出版された。

2020 年度の研究成果は、(1)スツルム = リウヴィル型方程式のリアプノフ不等式の一般化；(2)一般化三角関数と一般化双曲線関数との間の双対性の発見と応用である。(1)は防衛大学の渡辺宏太郎氏との共同研究である。スツルム = リウヴィル方程式のリアプノフ不等式に関する C-W. Ha 氏の結果を p ラプラシアンの場合に拡張した。Ha 氏はラプラシアンの特性を生かしグリーン関数を用いて証明していたが、 p ラプラシアンは一般にグリーン関数を構成できない。我々は変分法を用いたまったく違うアプローチをとることで自然の拡張を得ることに成功した。(2)について述べる。一般化三角関数と一般化双曲線関数は p ラプラシアンの固有関数として特徴づけられるものであり、それぞれ三角関数と双曲線関数の(2つの自由パラメータを含む)一般化になっている。三角関数と双曲線関数は複素関数として考えると互いに変換できることはよく知られているが実関数としてはその関係が見えない。ところが我々の当該年度の研究によって、一般化三角関数と一般化双曲線関数においてはお互いのパラメータを適当に選ぶことによって、実関数の範疇で互いに変換できることがわかった。従来考えられていたパラメータの範囲を広げるとともにこの変換に相当するうまい置換積分を行ったことで、双方の間の双対性を発見できたのである。この双対性の発見により、以前から知られていた一般化三角関数に関するある種の等式や不等式を、双対性を用いて書き換えることで、一般化双曲線関数に関する新しい等式や不等式を得ることができた。また逆に一般化双曲線関数の関係式から一般化三角関数の対応する新しい関係式も得ることができた。特にミトリノヴィッチ = アダモヴィッチ型不等式に関しては既に、一般化三角関数の場合と一般化双曲線関数の場合がそれぞれ独立に証明されているが(Klen-Vuorinen-Zhang(2014), Neuman(2015)), 我々が発見した双対性によればこのそれぞれの不等式は互いに双対の関係にあることがわかった。これらの成果は大学院生との共同研究として論文にまとめ投稿し後年出版された。

2021 年度の成果は、2020 年度に研究代表者が共同研究者とともに発見した一般化三角関数と一般化双曲線関数の間にある双対性の応用である。古典的な三角関数と双曲線関数には、ミトリノヴィッチ = アダモヴィッチ不等式、ウィルカー方程式、ホイヘンス不等式、クサ不等式などの有名な不等式があり、それぞれ三角関数版と双曲線版のペアが知られている。それらのペアは一般化三角関数と一般化双曲線関数に対して一般化されている(例えば、Klen-Vuorinen-Zhang(2014), Neuman(2015)など)。従来の証明法はペアの二つに対し同様な解析を個別に行うものである。これに対し我々は前年度に、ミトリノヴィッチ = アダモヴィッチ不等式のペアの一般化を、片方からもう片方を双対性を用いて直ちに得るという別証明を与えた。そして当該年度は他のすべての不等式について既知のペアを、双対性を持つように修正または拡張しつつ同時に明快な証明を与えた。この結果は現在、大学院生との共著論文として投稿中である。このような不等式のペアを横断的に得る方法を開発することができたのが大きな成果である。

最後に、本研究課題では三角関数、双曲線関数、またそれに関連して円周率、ヤコビ楕円関数、

完全楕円積分, シンク関数などの様々な古典的な数学的対象を, p ラプラシアンの研究に向けて一般化してきた. 最終年度につきこの場を借りて, 研究費を使わせて頂けたことに深く感謝申し上げます.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 7件）

1. 著者名 Takeuchi Shingo	4. 巻 2021
2. 論文標題 Some double-angle formulas related to a generalized lemniscate function	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 The Ramanujan Journal	6. 最初と最後の頁 753-761
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11139-021-00395-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Miyakawa Hiroki, Takeuchi Shingo	4. 巻 502
2. 論文標題 Applications of a duality between generalized trigonometric and hyperbolic functions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 125241 ~ 125241
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2021.125241	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Takeuchi Shingo, Watanabe Kohtarō	4. 巻 34
2. 論文標題 Lyapunov-type inequalities for a Sturm-Liouville problem of the one-dimensional p -Laplacian	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Differential and Integral Equations	6. 最初と最後の頁 383 ~ 399
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Melkonian Houry, Takeuchi Shingo	4. 巻 499
2. 論文標題 Remarkable properties of the sinc, functions and related integrals	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 124981 ~ 124981
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2021.124981	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Ozawa Shimpei、Takeuchi Shingo	4. 巻 12
2. 論文標題 Redheffer-type inequalities for generalized trigonometric functions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Inequalities and Special Functions	6. 最初と最後の頁 16-22
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Sato Shota、Takeuchi Shingo	4. 巻 250
2. 論文標題 Two double-angle formulas of generalized trigonometric functions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Approximation Theory	6. 最初と最後の頁 105322 ~ 105322
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jat.2019.105322	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takeuchi Shingo	4. 巻 11
2. 論文標題 Applications of generalized trigonometric functions with two parameters II	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Differential Equations & Applications	6. 最初と最後の頁 563 ~ 575
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7153/dea-2019-11-28	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kobayashi Hiroyuki、Takeuchi Shingo	4. 巻 18
2. 論文標題 Applications of generalized trigonometric functions with two parameters	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Communications on Pure & Applied Analysis	6. 最初と最後の頁 1509 ~ 1521
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/cpaa.2019072	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takeuchi Shingo	4. 巻 46
2. 論文標題 Complete π -elliptic integrals and a computation formula of π for $p=4$	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 The Ramanujan Journal	6. 最初と最後の頁 309 ~ 321
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11139-018-9993-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kamiya Toshiki, Takeuchi Shingo	4. 巻 10
2. 論文標題 Complete (p,q) -elliptic integrals with application to a family of means	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Classical Analysis	6. 最初と最後の頁 15 ~ 25
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7153/jca-10-02	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計21件 (うち招待講演 9件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 竹内慎吾, 渡辺宏太郎
2. 発表標題 Lyapunov-type inequalities for a Sturm-Liouville problem of the one-dimensional p -Laplacian
3. 学会等名 RIMS共同研究 (グループ型) 「非線形問題への常微分方程式の手法によるアプローチ」, 於京都大学数理解析研究所
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 小沢 新平, 竹内 慎吾
2. 発表標題 一般化三角関数に対する Redheffer 型不等式
3. 学会等名 第6回ODE若手セミナー
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 竹内 慎吾
2. 発表標題 1次元 p -Laplacian の固有関数の2倍角公式
3. 学会等名 愛媛大学における微分方程式セミナー（通算第42回）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 竹内 慎吾
2. 発表標題 L^q -Lyapunov inequality for the one-dimensional p -Laplacian
3. 学会等名 東北大学応用数理解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 竹内 慎吾
2. 発表標題 ある非局所境界値問題の厳密解と非対称性
3. 学会等名 日本数学会年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 竹内 慎吾
2. 発表標題 Exact solutions and asymmetry for a nonlocal boundary value problem
3. 学会等名 第11回名古屋微分方程式研究集（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 竹内 慎吾
2. 発表標題 Exact solutions and asymmetry for a nonlocal boundary value problem
3. 学会等名 RIMS共同研究(グループ型)「微分方程式の手法による非線形問題の探求」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 竹内 慎吾
2. 発表標題 ある1次元非局所境界値問題の厳密解と非対称性
3. 学会等名 第48回南大阪応用数学セミナー(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 佐藤 翔太, 竹内 慎吾
2. 発表標題 一般化正接関数の倍角公式
3. 学会等名 第5回ODE若手セミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 竹内 慎吾
2. 発表標題 L^q -Lyapunov inequality for the one-dimensional p -Laplacian
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 竹内 慎吾
2. 発表標題 不完全楕円積分に関するルジャンドルの関係式とその一般化
3. 学会等名 第19回半田山微分方程式セミナー（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 竹内 慎吾
2. 発表標題 \mathbb{S}^p -Laplacian の固有関数による完全楕円積分の一般化
3. 学会等名 Nonlinear Evolutionary PDEs and their Equilibrium States II（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 竹内 慎吾
2. 発表標題 \mathbb{L}^q -Lyapunov inequality for the one-dimensional \mathbb{S}^p -Laplacian
3. 学会等名 芝浦工業大学における微分方程式セミナー（通算第41回）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 H. Kobayashi, S. Takeuchi
2. 発表標題 Integral formulas of generalized trigonometric functions with two parameters
3. 学会等名 The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (AIMS2018)（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 S. Takeuchi
2. 発表標題 Applications of generalized trigonometric functions to nonlocal boundary value problems
3. 学会等名 The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications (AIMS2018) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 竹内 慎吾
2. 発表標題 1次元 p ラシアン固有関数に関する数論的性質
3. 学会等名 第1回「解析学とその周辺」@野田 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 S. Takeuchi
2. 発表標題 Generalization of the trigonometric functions
3. 学会等名 The 2nd SIT-UOG workshop on pure/applied mathematics and computer science (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 竹内 慎吾
2. 発表標題 一般化三角関数の非局所境界値問題への応用
3. 学会等名 日本数学会年会, 於東京大学
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 竹内 慎吾
2. 発表標題 Applications of generalized trigonometric functions to nonlocal boundary value problems
3. 学会等名 RIMS共同研究(グループ型)「非線形問題への常微分方程式の手法によるアプローチ」, 於京都大学数理解析研究所
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 福田 陸斗, 竹内 慎吾
2. 発表標題 ヒット現象に現れるリッカチ型方程式の厳密解
3. 学会等名 第4回ODE若手セミナー, 於大阪府立大学
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Shingo Takeuchi
2. 発表標題 Legendre's relation for incomplete elliptic integrals and its generalization
3. 学会等名 Workshop on Geometric Function Theory and Special Functions II, Tohoku University, Sendai, Japan (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

芝浦数理・関数方程式研究室 https://sites.google.com/shibaura-it.ac.jp/shingo/
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
英国	University of Exeter			