

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 3 年 6 月 9 日現在

機関番号：12101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2020

課題番号：17K05341

研究課題名(和文)変形指数型分布の情報幾何

研究課題名(英文)Information geometry on deformed exponential probability distributions

研究代表者

和田 達明(WADA, Tatsuaki)

茨城大学・理工学研究科(工学野)・教授

研究者番号：00240549

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：情報幾何学において双対平坦構造が重要であることは良く知られている。本研究では、変形指数型分布の情報幾何構造における多重双対平坦構造について研究を行い、以下の成果を得た。(1) J. Zhangによる"共役表現"を利用することで、一般的な変形指数型分布から適切な統計多様体を構成する方法を見出した。(2) エスコート期待値の特徴付けを行なうことができた。(3) 変形指数型分布に対する多重エスコート期待値の存在により、多重双対平坦性が生じることが判明した。(4) 熱力学・統計力学などの関連分野との適用例を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

従来の情報幾何学において双対平坦性は非常に重要だが、それが多重に現れることはなかった。本研究の意義は、変形指数型分布の情報幾何構造において双対平坦性が多重に現れることを、多重エスコート期待値との関係により示したことにある。このメカニズムを、熱力学・統計力学における非平衡状態を記述する物理系へ適用することで、従来の指数型分布に対して成立する揺動散逸定理、揺動応答関係、揺らぎの定理などの熱系に対する重要な物理法則を、変形指数型分布に基づいて拡張する道が開かれ、情報幾何学のみならず、統計力学、統計推定、最適輸送などの様々な関連分野への波及効果があると期待できる。

研究成果の概要(英文)：It is well known that dually-flat structures are important geometric structures in information geometry. In this research, we have studied the multiple dually-flat structures in information geometric structures of a general deformed-exponential family. We have found that i) the method to construct an appropriate statistical manifold from a general deformed-exponential family by using so-called "conjugate representation" proposed by J. Zhang; ii) characterizing escort-expectations by using our method; iii) the existing of the multiple dually-flat structures based on the multiple escort-expectations for a deformed-exponential family; iv) some applications to Thermodynamics, Statistical Physics, and related fields.

研究分野：数理工学、統計力学、情報幾何学

キーワード：情報幾何学 変形指数型分布 共役表現 統計多様体 一般化エントロピー 双対平坦 エスコート分布  
エスコート期待値

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

情報幾何学は、主として指数型の確率分布族から構成された統計多様体上の微分幾何構造 (Fisher 計量、双対接続など) に基づく枠組みであり、統計学、情報理論、機械学習、量子観測理論など様々な分野への応用を通じて発展を遂げてきた。一方、一般化エントロピに基づく熱統計学の拡張である一般化熱統計学に関する研究がここ数十年の間に発展し、統計物理、情報理論、経済物理、統計学などの様々な分野へ波及し、関連研究がなされてきた。一般化エントロピの具体例としては、Tsallis エントロピや  $\eta$ -エントロピが比較的良く知られていて、関連する非線型拡散方程式、非線型 Fokker-Planck 方程式や Legendre 構造などが研究代表者等によるそれまでの研究を通じて明らかになっていた。また、当時アントワープ大学の Naudts 教授が、より一般の変形指数型分布に基づいた一般化熱統計学を提唱し、その理論的枠組みを構築していた。しかしながら、当時は情報幾何学に対する熱力学・統計力学の観点からの研究は国内外にも殆どなかった。

熱力学・統計力学において非常に基本的かつ重要である Maxwell 関係式および揺動応答関係が、情報幾何学における双対平坦構造を持つ指数型分布に対する Fisher 計量の性質から導出できる事実を利用して、研究代表者は双対平坦構造を持つ指数型分布における揺らぎと応答を結びつける揺動応答関係の拡張版の導出に成功し、これらの数学的・幾何学的な関係式が、熱統計学における非平衡状態を記述する際に物理的に重要であるとの認識に至った。更に、変形指数型分布に付随するエスコート期待値が重要な役割を果たし、通常の期待値とエスコート期待値の両方に対して双対平坦となる 2 重双対平坦構造が存在することが分かり、それらの拡張に関する本研究の着想に至った。

## 2. 研究の目的

指数型分布を一般化した変形指数型分布の研究が、一般化エントロピに基づく熱統計学や統計力学の拡張に関する様々な分野において進展しつつある。情報幾何学は、主として指数型の確率分布族に対して適切な表現を用いて構成された統計多様体上の微分幾何構造に基づく枠組みであり、その非常に重要な幾何構造として双対平坦性が良く知られている。研究代表者等は、ある特定の変形指数型分布 ( $\eta$ -指数型分布や  $q$ -指数型分布) に対して 2 重あるいは多重になって双対平坦性 (多重双対平坦性) が現れることを見つけていた。本研究の目的は、i) 変形指数型分布の情報幾何構造における 2 重あるいは多重双対平坦性を明らかにすることを主目的とし、ii) 情報幾何学に関連する熱力学・統計力学などの分野への適用例を示すことである。

## 3. 研究の方法

情報幾何学において、指数型分布族に対しては表現 (はめ込み) による統計多様体の構成方法が良く知られているが、一般的な変形指数型分布族から統計多様体を構成する方法については、当初は良く知られていなかった。そこで、多重双対平坦性が現れることを調べるためには、先ず一般的な変形指数型分布に対して適切な統計多様体を構成する方法を見つけることを、初年度の目標とした。当時、表現を一般化した共役表現が Zhang により提案されていたので、この共役表現を詳しく調べることで、新たな知見が得られると推測していた。また、双対平坦性が 2 重あるいは多重に起こる仕組みは、変形指数型分布に付随して生じる「エスコート分布やエスコート期待値」の 2 重あるいは多重性に起因しているので、一般的な変形指数型分布におけるエスコート期待値の特徴を良く調べるのが重要である。

これらの多重双対平坦性に関して得られた知見と、情報幾何学に関連する熱力学・統計力学などの分野との対応関係について理解を深めていくことが重要であると考え、a) 一般化エントロピに基づく統計力学や関連する統計物理の拡張; b) 勾配流やハミルトン・ダイナミクスおよびシンプレクティック幾何学との関係; c) ワッサーシュタイン幾何による最適輸送などの様々な関連分野について、各分野の研究者と直接議論を交わすことで、本研究を進めていった。

## 4. 研究成果

### i) 変形指数型分布の情報幾何構造における多重双対平坦性 :

初年度の研究成果として、最初の目標である「変形指数型分布から適切な統計多様体を構成するために必要な、統計多様体上へのはめ込み写像 (共役表現) を見出すこと」を達成でき

た。具体的には、情報幾何における表現を拡張した Zhang による"共役表現"を利用することで、変形指数型分布族に対する適切なはめ込み写像(共役表現)を求めることができた。

翌年度には、上記の成果を利用して、変形指数型分布族に付随するエスコート分布に対する期待値であるエスコート期待値の特徴付けを行なった。具体的には、変形指数型分布に対する共役表現に基づいて一般化したスコア関数のエスコート期待値がゼロとなることを明らかにした。

一般に、変形指数型分布にはエスコート分布が付随するので、通常の期待値に関する双対平坦構造に加えてエスコート期待値に関する双対平坦構造が生じる。エスコート分布には更にそのエスコート分布(ダブル・エスコート分布)が付随するので、ダブル・エスコート期待値に関する双対平坦構造も生じる。このような仕組みで、一般的な変形指数型分布に対して、多重平坦構造が生じることが分かった。

## ii) 情報幾何学に関連する熱力学・統計力学などの分野への適用例：

変形指数型分布の良く知られた具体例に  $q$ -指数型分布がある。これは Tsallis エントロピを適切な条件下で最適化する分布であり、Tsallis エントロピに関する情報幾何構造の研究は既に幾つかなされていたが、本研究ではこの  $q$ -指数型分布を最適分布とする Renyi エントロピに関する情報幾何構造を明らかにした。

また、変形指数型分布の別の具体例として知られている  $\beta$ -指数型分布が、統計力学における基本的な正準分布として出現するメカニズムとして、速度空間における浅いポテンシャル中に閉じ込められた熱的粒子の停留確率分布が  $\beta$ -指数型分布で表されることが分かった。その速度空間における浅い非線形ポテンシャルを特徴付けるパラメータを用いて、このポテンシャルに閉じ込められた熱的粒子の停留確率分布である  $\beta$ -指数型分布のパラメータである  $\beta$  を具体的に求めた。

情報幾何学における勾配流方程式がハミルトン方程式で記述できることは約 20 年程前に知られていたが、その物理的な意味については明らかではなかった。この課題に対して、本研究の成果を利用して、情報幾何学における勾配流方程式と熱力学との関係を、幾何光学におけるアイコナル方程式を用いて研究し、熱力学へダイナミクスを導入できることを示した。この成果は更に統計力学や最適輸送の研究へ発展させることが期待できる。

更に、地図でなじみ深いメルカトル射影に関する共形変換構造を、情報幾何学における基本的モデルであるガウス分布の場合に適用し、捩れ持つ接続を導入してその情報幾何構造を調べた。今後の情報幾何学に対する新たなアプローチとなることを期待する。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 11件／うち国際共著 8件／うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Wada Tatsuaki, Scarfone Antonio M., Matsuzoe Hiroshi	4. 巻 570
2. 論文標題 An eikonal equation approach to thermodynamics and the gradient flows in information geometry	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Physica A: Statistical Mechanics and its Applications	6. 最初と最後の頁 125820-125820
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.physa.2021.125820	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kaniadakis Giorgio, Baldi Mauro M., Deisboeck Thomas S., Grisolia Giulia, Hristopulos Dionissios T., Scarfone Antonio M., Sparavigna Amelia, Wada Tatsuaki, Lucia Umberto	4. 巻 10
2. 論文標題 The $\alpha$ -statistics approach to epidemiology	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Scientific Reports	6. 最初と最後の頁 199949-199949
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1038/s41598-020-76673-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Scarfone Antonio M, Matsuzoe Hiroshi, Wada Tatsuaki	4. 巻 53
2. 論文標題 A study of Renyi entropy based on the information geometry formalism	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 145003 ~ 145003
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1751-8121/ab766c	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Wada Tatsuaki, Scarfone Antonio M., Matsuzoe Hiroshi	4. 巻 541
2. 論文標題 On the canonical distributions of a thermal particle in a generalized velocity-dependent potential	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Physica A: Statistical Mechanics and its Applications	6. 最初と最後の頁 123273 ~ 123273
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.physa.2019.123273	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Wada Tatsuaki	4. 巻 531
2. 論文標題 On some information geometric structures concerning Mercator projections	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Physica A: Statistical Mechanics and its Applications	6. 最初と最後の頁 121591 ~ 121591
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.physa.2019.121591	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ilic Velimir M., Scarfone Antonio Maria, Wada Tatsuaki	4. 巻 100
2. 論文標題 Equivalence between four versions of thermostatics based on strongly pseudoadditive entropies	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Physical Review E	6. 最初と最後の頁 62135
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevE.100.062135	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Scarfone Antonio, Matsuzoe Hiroshi, Wada Tatsuaki	4. 巻 20
2. 論文標題 Information Geometry of $\phi$ -Exponential Families: Dually-Flat, Hessian and Legendre Structures	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Entropy	6. 最初と最後の頁 436
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3390/e20060436	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Goto Shin-itiro, Wada Tatsuaki	4. 巻 51
2. 論文標題 Hessian-information geometric formulation of Hamiltonian systems and generalized Toda's dual transform	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 324001
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/aacbfd	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Wada Tatsuaki、Matsuzoe Hiroshi	4. 巻 19
2. 論文標題 Conjugate Representations and Characterizing Escort Expectations in Information Geometry	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Entropy	6. 最初と最後の頁 309 ~ 309
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3390/e19070309	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Kaniadakis G.、Scarfone A. M.、Sparavigna A.、Wada T.	4. 巻 95
2. 論文標題 Composition law of $\alpha$ -entropy for statistically independent systems	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Physical Review E	6. 最初と最後の頁 52112
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevE.95.052112	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Matsuzoe Hiroshi、Scarfone Antonio M.、Wada Tatsuaki	4. 巻
2. 論文標題 A Sequential Structure of Statistical Manifolds on Deformed Exponential Family	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Conference: International Conference on Geometric Science of Information	6. 最初と最後の頁 223 ~ 230
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-319-68445-1_26	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計5件(うち招待講演 1件/うち国際学会 2件)

1. 発表者名 和田達明, A.M. Scarfone
2. 発表標題 非線型のRayleigh散逸関数と変形ガウス分布
3. 学会等名 日本物理学会2019年秋季大会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 和田 達明
2. 発表標題 TBA (熱力学に基づくアプローチ)
3. 学会等名 ミニワークショップ 統計多様体の幾何学とその周辺 (10) (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Tatsuaki Wada
2. 発表標題 On the canonical distributions of the thermal particles in a weakly confining potential
3. 学会等名 The Ninth International Conference on Guided Self-Organisation (GSO-2018) : Information Geometry and Statistical Physics (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 和田達明
2. 発表標題 弱い閉じ込めポテンシャルに対する熱的確率分布とその情報幾何
3. 学会等名 日本物理学会 秋季大会 (岩手大)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Tatsuaki Wada
2. 発表標題 Information geometry on the thermal probability distributions for a weakly confining potential
3. 学会等名 International Conference on Statistical Physics (SigmaPhi2017) (国際学会)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

茨城大学 研究者情報総覧  
<https://info.ibaraki.ac.jp/Profiles/4/000304/profile.html>  
ResearchGate  
[https://www.researchgate.net/profile/Tatsuaki\\_Wada](https://www.researchgate.net/profile/Tatsuaki_Wada)

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
イタリア	トリノ工科大学	応用科学技術学科	Kaniadakisグループ