

令和 2 年 4 月 28 日現在

機関番号：10104

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K14149

研究課題名(和文) 超幾何関数の幾何学的研究

研究課題名(英文) Geometric study of hypergeometric functions

研究代表者

後藤 良彰 (Goto, Yoshiaki)

小樽商科大学・商学部・准教授

研究者番号：20742018

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：ねじれホモロジー群、コホモロジー群といった幾何学的な道具を用いて、超幾何関数を研究した。

超平面配置(退化配置を含む)に付随した超幾何積分に対する明示的な公式を導出し、それをコンピュータに実装することで代数統計への応用も実現した。Lauricella's  $F_C$  と呼ばれる多変数超幾何に対しては、モノドロミー群の構造を詳しく調べた。また、A-超幾何系に対しても、幾何学的な研究の基礎ができつつある。

研究成果の学術的意義や社会的意義

超幾何関数は数学の諸分野のみならず、統計学、数物理学においても登場する重要な関数の1つである。超幾何関数の研究は様々な方面から行われているが、特に積分表示およびそれに付随した幾何学的な構造(ホモロジー・コホモロジー)を利用して研究を進め、深く理解していくことで、多くの性質(公式など)を組織的に導出する方法が得られる。さらに、それらの統計学などの関連分野への応用も期待される。

研究成果の概要(英文)：We studied some types of hypergeometric functions by using geometric tools. We derived explicit formulas for hypergeometric integrals associated with hyperplane arrangements, and applied them to algebraic statistics. For Lauricella's hypergeometric function  $F_C$ , we investigated the monodromy group. We have started a geometric study of A-hypergeometric systems.

研究分野：特殊関数、特に超幾何関数

キーワード：超幾何関数 超幾何積分 ねじれホモロジー群 ねじれコホモロジー群 基本群 モノドロミー群

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

超幾何関数の研究手法の 1 つとして, Euler 型の積分表示に対応する「ねじれ(コ)ホモロジー群」及びその上の「交点形式」を利用するという方法がある. この手法をより広いクラスの超幾何関数に適用し, 様々な性質の背景を探っていきたいと考えた.

Lauricella's  $F_C$  と呼ばれる多変数超幾何関数の積分表示に現れる多価関数は, その因子として高次式のべき関数を含むため, 既存の議論では不十分な部分があったが, 代表者による研究により少しずつ構造が明らかになってきていた. 例えば, モノドロミー表現をねじれホモロジー群の交点形式によって表示することができており, より深く研究を進めるための準備が整っていた.

$(k,n)$  型超幾何積分は以前から調べられてきた対象であるが, この超幾何及びその特異点集合への制限に対する明示的な公式は, 代数統計へ応用できることが分かってきた. そこで,  $(k,n)$  型超幾何積分の Pfaffian 方程式や隣接関係式の交点形式を用いた明示的表示の導出に関する研究を進めており, その実装を行うことで, 代数統計への応用も見込まれていた.

さらに, 様々な超幾何系を含む大きなクラスとして, 「A-超幾何系」にも関心があった. A-超幾何系は組合せ論的な構造も備えており, 様々な観点から調べられているが, ねじれ(コ)ホモロジー群を用いた詳細な研究はまだ開拓の余地が多い.

### 2. 研究の目的

本研究ではねじれ(コ)ホモロジー群と交点形式を用いて, 一般化された超幾何関数を幾何学的に研究する. 特に「退化配置に付随する超幾何積分」に対して, 一般の位置にない超平面配置に対応する超幾何積分に付随するねじれ(コ)ホモロジー群の構造を交点形式によって統制していくことを, 「A-超幾何系」に対して, A-超幾何系の級数解に対応するねじれサイクルに関する研究を目標とした.

Lauricella's  $F_C$  について, ねじれホモロジー群を用いたモノドロミー表現の表示が得られていた. 解空間の基底を選ぶと行列表示を得ることもできるため,  $F_C$  のモノドロミー群(行列群)の構造を詳しく調べていくことも課題とした.

$(k,n)$  型超幾何積分に対する Pfaffian 方程式と隣接関係式は, ホロノミック勾配法により代数統計へ応用できることから, プログラムへ実装できるレベルの明示的な公式とその実装が望まれているため, これらの研究を進めていくことにした. さらに, 退化配置に付随する超幾何は「構造的ゼロ」を持つ分割表のモデルに対応するため, この超幾何に対しても明示的な隣接関係式等を導出することは応用上も重要である.

### 3. 研究の方法

単独で進めた研究もあるが, 各地の研究者との共同研究も実施した. 松本圭司氏(北海道大学)とは,  $(k,n)$ 型超幾何積分に関するねじれコホモロジー群の研究, Lauricella's  $F_C$  のモノドロミー表現の既約性などの共同研究を実施した. 高山信毅氏(神戸大学)には Risa/Asir の使い方の助言をもらうとともに, 得られた結果の代数統計への応用に関する議論をした. 松原宰栄氏(神戸大学)とは A-超幾何系の級数解に対応するねじれサイクルの構成法について研究連絡し, さらに交点理論についての共同研究を開始した. 金子譲一氏(琉球大学)とは基本群に関する研究で議論を重ねた. 小池健二氏(山梨大学)との共同研究で, Lauricella's  $F_C$  のモノドロミー群の構造を詳しく調べた.

計算機システム Maple を, 公式の形を予想したり, 得られた公式を確認したりすることに利用した. 計算機代数システムの Risa/Asir を用いて,  $(k,n)$  型超幾何の隣接関係式とその分割表の正規化定数計算への応用も実装した. また, 有限群に関する計算には GAP というシステムを利用し,  $F_C$  の有限既約モノドロミー群の研究に活用した.

また, 各地で行われている研究集会に参加し, 得られた成果を発表することで, 幅広く参考になる意見をいただいた. 他の参加者の発表を聴き, 最近の研究動向についての情報収集も行った.

### 4. 研究成果

#### (1)特異点集合上の超幾何積分と交点数

「余次元 1 の特異点集合上の超幾何積分」を詳細に考察し, ねじれ(コ)ホモロジー群の構造を交点形式によって記述した. この構造を利用することで, 退化配置に付随するねじれ(コ)ホモロジー群上の交点数に対する, 計算しやすい公式を得ることができた. この結果を論文にまとめ, 現在学術論文誌に投稿中である.

#### (2)交点行列を用いた隣接関係式の代数統計への応用

松本圭司氏(北海道大学)との共同研究で,  $(k,n)$ 型超幾何積分に対する隣接関係式と Pfaffian 方程式について, ねじれコホモロジー群の交点形式を利用して明示的な公式を得た. さらに, それらの公式を計算機代数システム Risa/Asir へ実装した. 橘義仁氏, 高山信毅氏(神戸大学),

小山民雄氏(稚内北星学園大学)との共同研究により、2元分割表に対する周辺和固定の条件付き分布の正規化定数の正確値計算など、代数統計への応用も得られた。この結果は学術論文誌 Algebraic Statistics に掲載が決定している(査読あり)。

(3)Lauricella's  $F_C$  の特異点集合の補集合の基本群の構造  
金子譲一氏(琉球大学)と共同で研究した。変数の個数が一般の場合に成り立つ関係式を導出し、3変数の場合には関係式がそれで十分であることを証明した。

(4)Lauricella's  $F_C$  のモノドロミー群の Zariski 閉包, 有限既約性  
松本圭司氏との共同研究で、モノドロミー表現の既約性を調べるとともに、解空間の良い基底を構成し、モノドロミーの簡潔な行列表示を得た。この行列表示により、以下のモノドロミー群の研究を進めることができるようになった。

モノドロミー群の Zariski 閉包に関しては、小池健二氏(山梨大学)と共同で研究した。モノドロミー群の中の鏡映で生成される部分群に着目し、モノドロミー群の構造を調べた。また、パラメータを特殊化した  $F_C$  を周期にもつ  $K3$  曲面や 3次元 Calabi-Yau 多様体についても調べた。

これに引き続き、モノドロミー群が有限既約になる場合について調べた。既に知られていた2変数の場合の結果の多変数化として、有限既約性の必要十分条件をパラメータに関する条件として明示的に書くことができた。2変数の場合と類似した議論も多用しているが、3変数以上の場合の特殊性が現れ、2変数の場合の条件を直接一般化するだけでは不十分であることも判明した。この研究では、モノドロミー群そのものの構造もかなり詳しく調べている。この結果を論文としてまとめ、現在学術論文誌に投稿中である。

(5)A-超幾何系の級数解に対応するサイクルとその交点数

A-超幾何系の級数解に対応するねじれサイクルについては、松原宰栄氏(神戸大学)の仕事により、多くの結果が得られており、特にユニモジュラーな三角形分割を持つ  $A$  に対しては、交点理論もかなり整備されている。この理論を土台に、松原氏と共同で、ユニモジュラーでない場合に交点理論がうまくいくサイクルの構成に関する研究を開始した。その結果、ユニモジュラーでない三角形分割に付随するサイクルについても交点数の計算が可能になってきた。まだ論文にはなっていないが、引き続き研究を進めていきたい。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 GOTO Yoshiaki, MATSUMOTO Keiji	4. 巻 48
2. 論文標題 Irreducibility of the monodromy representation of Lauricella's ${}_3F_4$	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Hokkaido Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 489 ~ 512
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14492/hokmj/1573722015	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Goto Yoshiaki, Koike Kenji	4. 巻 -
2. 論文標題 Picard-Vessiot groups of Lauricella's hypergeometric systems EC and Calabi-Yau varieties arising integral representations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/jlms.12311	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Goto Yoshiaki, Kaneko Jyoichi	4. 巻 17
2. 論文標題 The fundamental group of the complement of the singular locus of Lauricella's $F_C$	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Singularities	6. 最初と最後の頁 295 ~ 329
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5427/jsing.2018.17m	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Goto Yoshiaki, Matsumoto Keiji	4. 巻 61
2. 論文標題 Pfaffian Equations and Contiguity Relations of the Hypergeometric Function of Type $(k+1, k+n+2)$ and Their Applications	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Funkcialaj Ekvacioj	6. 最初と最後の頁 315 ~ 347
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1619/fesi.61.315	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計13件(うち招待講演 8件/うち国際学会 4件)

1. 発表者名 Yoshiaki Goto
2. 発表標題 Contiguity relations for hypergeometric integrals of type (k,n)
3. 学会等名 Dublin Mathematics Colloquium (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshiaki Goto
2. 発表標題 Contiguity relations for hypergeometric integrals
3. 学会等名 Differential systems: from theory to computer mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 後藤 良彰
2. 発表標題 確定特異点型 GKZ 超幾何系の級数解と Euler 型積分
3. 学会等名 日本数学会北海道支部講演会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 後藤 良彰
2. 発表標題 Lauricella's $F_C$ の特異点集合の補集合の基本群について
3. 学会等名 湯布院代数幾何学ワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshiaki Goto
2. 発表標題 Finite irreducible monodromy group for Lauricella's $F_C$
3. 学会等名 Monodromy and Hypergeometric Functions (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 後藤 良彰
2. 発表標題 Lauricella $F_C$ のモノドロミー群に関する考察
3. 学会等名 2018年度 函数方程式論サマーセミナー
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 後藤 良彰
2. 発表標題 Lauricella $F_C$ のモノドロミー群について
3. 学会等名 複素領域における微分方程式とその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 後藤 良彰
2. 発表標題 Lauricella $F_C$ のモノドロミー群の構造について
3. 学会等名 第12回玉原特殊多様体研究集会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yoshiaki Goto
2. 発表標題 Monodromy of Lauricella's hypergeometric function $F_C(I, II)$
3. 学会等名 Hypergeometric functions and mirror symmetry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 後藤 良彰
2. 発表標題 Finite irreducible monodromy group for Lauricella's $F_C$
3. 学会等名 日本数学会 2019年度年会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 後藤 良彰
2. 発表標題 Lauricella $F_C$ の singular locus の補集合の基本群について
3. 学会等名 第11回 玉原特殊多様体研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 後藤 良彰
2. 発表標題 Appell $F_4$ から定まる $K3$ 曲面と置換積分について
3. 学会等名 超幾何方程式研究会 2018
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 後藤 良彰
2. 発表標題 3変数 Lauricella $F_3$ の singular locus の補集合の基本群
3. 学会等名 琉球超幾何ワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----