1版

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　５ 月 ３１ 日現在

機関番号：３２６６６
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2017～2018
課題番号：１７Ｋ１４２０８
研究課題名（和文）対称空間上のディラック作用素に対するスペクトル解析

研究課題名（英文）Spectral analysis of the Dirac operator on symmetric spaces

研究代表者
貝塚　公一（Kaizuka, Koichi）

日本医科大学・医学部・講師

研究者番号：３０７３７５４９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　1,200,000円

研究成果の概要（和文）：非コンパクト型対称空間上のディラック作用素の連続スペクトルの構造の解析について研究を行った．対称空間に付随する制限ルート系が偶数重複度条件を満たす場合，および実特殊線形リー群に付随する対称空間などのいくつかの系列に対してディラック作用素の連続スペクトルを表現論を用いて決定し，研究課題を部分的に解決した．また，対称空間に付随する制限ルート系が偶数重複度条件を満たす場合に，ディラック作用素は複素レゾナンスを持たないことを示した．一方で，主系列表現に付随する同時固有関数に対する散乱理論と，スピンを持たない自由な量子力学的粒子の運動を記述するラプラス-ベルトラミ作用素に対して散乱理論を構築した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
非コンパクトなスピン構造を持つ多様体上において，ディラック作用素が零固有値を持つか否か，スペクトルギャップを持つか否かは多様体の幾何学的性質に深く依存している．本研究で，いくつかの高ランクの対称空間上のディラック作用素の連続スペクトルを決定し，同じ対称空間でも性質が異なるスペクトルが生じることを示したことは，解析と幾何の両分野において興味深い具体例を比較的多く挙げることが出来たという一定の意義がある.また，対称空間上のいくつかの微分作用素に対してスペクトル散乱理論を構築することは，より広いクラスのリーマン多様体上のスペクトル・散乱理論を構築する際の足掛かりとなる意義があるる.

研究成果の概要（英文）：The author studied continuous spectrum of the Dirac operator on symmetric spaces of noncompact type.He determined the structure of the continuous spectrum of the Dirac operator for several series of symmetric spaces (e.g. even multiplicity case, real special linear groups), and partially solved the subject.Moreover, under the even multiplicity condition, he proved the non-existence of complex resonances for the Dirac operator.On the other hand, he also constructed scattering theory for the joint eigenfunctions associated with principal series representations and that for the Laplace-Beltrami operator which describes the motion of a spinless quantum particle.

研究分野：対称空間上のスペクトル・散乱理論

キーワード：対称空間　ディラック作用素　スペクトル　表現論

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

量子力学において，ディラック作用素はスピンをもつ素粒子を記述する際に現れる作用素である．一方，リーマン幾何学においては，作用素の解析的な指数と空間の幾何学的な指数を結びつける，ディラック作用素の指数定理が研究されている．非コンパクト型対称空間においても，スピン表現を用いることでディラック作用素が大域的に定義され，調和解析の枠組みで表現論を用いた研究が進められている．特に，Goette＆Semmelmann（Proc Amer. Math. Soc.(2001)) は，非コンパクト型対称空間上のディラック作用素の固有値を決定し，Camporesi＆Pedon（Proc. Amer. Math. Soc.（2001)）はランクが１という特殊な条件のもとで（零）固有値が現れるときにのみ連続スペクトルとの間にギャップが生じることを証明している．これらの先行研究から，非コンパクト型対称空間上のディラック作用素のスペクトル（あるいはレゾナンス）の構造は対称空間が持つ幾何学的構造を深く反映しており，それらの間の関係性を明らかにすることは幾何解析における重要な研究課題であると考えるに至った．

２．研究の目的

本研究では，非コンパクト型対称空間と呼ばれる曲がった空間上で，ディラック作用素に対するスペクトル解析について考察する．一般の完備リーマン多様体上では得ることが難しい，微分作用素のスペクトルや広い意味での固有値，固有関数の詳細な性質を，非コンパクト型対称空間上の調和解析や表現論を用いて，具体的かつ陽的な解析により得ることを目的とする．具体的には，一般ランクの非コンパクト型対称空間上のディラック作用素の連続スペクトルの構造の決定とディラック作用素のレゾナンスの解析を目的とする．微分作用素の半共鳴状態に対するレゾナンスと，双対的な空間(コンパクト双対)にあたるコンパクト型対称空間上の微分作用素の束縛状態に対する固有値の対応原理を解明することは，スペクトル理論，表現論の両側分野に重要な具体例を提示する意義を持つ．

３．研究の方法

以下は当初検討していた方法に若干の変更を加えたものである．ランク１の場合には Camporesi＆Pedon（Proc. Amer. Math. Soc.（2001))により，スピン表現の分規則をすべて陽的に計算することで対称空間上のディラック作用素の連続スペクトルが決定されている．一方で，ランクが２以上の場合には，問題の難易度と本質が大きく異なる．ランクが２以上の場合には，連続スペクトルを決定する為に，複数の放物型部分群に付随する無限次元表現とスピン表現の分規則の関係性を調べる必要性が出てくる．ランクが２であれば Camporesi＆Pedon に倣い，具体的にスピン表現の分規則の解析を行うことで，連続スペクトルの決定ができる可能性はあるが，一般の場合に問題を解決する為には全く異なる視点が必要になる．そこで，ランクが２の場合に具体性を生かした解析を行い連続スペクトルの構造を決定し，既に得られている一般の場合の固有値の存在・非存在の特徴づけ（Goette＆Semmelmann（Proc Amer. Math. Soc.(2001))の先行研究と比較し連続スペクトルの下限を達成する放物型部分群の特徴を解析することで，ディラック作用素のスペクトルを解析する．

４．研究成果

(1) 非コンパクト型対称空間上のディラック作用素の連続スペクトルを考察し，いくつかの対称空間の系列で連続スペクトルの構造を決定した．例えば，いくつかのランク２の対称空間，対称空間に付随する制限ルート系が偶数重複度条件を満たす場合，実特殊線形リー群に付随する対称空間，擬特殊ユニタリ線形リー群に付随するいくつかの対称空間などにおいてディラック作用素の連続スペクトルを決定した．その結果，ランク１の先行研究(引用文献①参照)から自然に予想される「(零) 固有値が存在するならば連続スペクトルとの間にギャップが生じ，固有値が存在しない場合は連続スペクトルが実数全体から成る集合に一致する」という結果を示すことが出来た．これまで，ランクが１という非常に特殊な条件下でディラック作用素のスペクトルが決定されていたが，この結果によりランクが２以上のある程度豊富な対称空間の系列に対して結果が拡張された．また，対称空間に付随する制限ルート系が偶数重複度条件を満たす場合に，等質ベクトルバンドルに対するプランシュレルの定理を応用することで，ディラック作用素のレゾルベントを解析接続した際にレゾナンスは現れないことを示した．以上の研究は，本研究の研究年度が終了した後も続行する．

(2) ディラック作用素がスピンをもつ素粒子を記述する際に現れる微分作用素であるのに対して，スピンをもたない素粒子を記述するのがラプラス-ベルトラミ作用素である．ラプラス-ベルトラミ作用素に対するスペクトル・散乱理論は，ディラック作用素に対するスペクトル・散乱理論を構築する上での足掛かりおよび比較検討の対象となる．非コンパクト型対称空間上のラプラス-ベルトラミ作用素のスペクトル自体の構造はよく知られており，固有値は存在せず連続スペクトルの端点が制限ルート系から定まることが知られている．つまり，スペクトルの

構造自体には対称空間の幾何学的性質はあまり深くは反映されない.そこで，ラプラス-ベルトラミ作用素に付随する一般化固有関数を Agmon-Hörmander 空間と呼ばれる関数空間を通じて特徴づけ，無限遠における漸近展開である散乱公式を証明し対称空間の持つ幾何学的構造との関連性を考察した．その結果，散乱公式に表れる幾何学的散乱行列と呼ばれるユニタリ作用素の低エネルギー極限を考察すると，対称空間の極大平坦な部分多様体の幾何構造がその極限に現れることが分かった．また，ラプラス-ベルトラミ作用素に対するスペクトル・散乱理論を構築する際に各種の不等式評価をエネルギーに関して一様に評価することで，スペクトル射影作用素に付随する Strichartz 予想(引用文献③参照)を解決した（雑誌論文①参照）．ランクが２以上の非コンパクト型対称空間は，幾何学的に自然にコンパクト化した際に無限遠に特異性が現れる.無限遠で特異性が現れるリーマン多様体上のラプラス-ベルトラミ作用素に対するスペクトル・散乱理論については，十分に一般論が確立されているわけではない．非コンパクト型対称空間は，無限遠の特異性に関して豊富な具体例を与えており，この結果はより広いクラスのリーマン多様体上のスペクトル・散乱理論の構築への礎となる可能性が高い．また，この結果においては無限遠の特異性に関する漸近解析は不十分である為，今後も研究を継続する予定である.

(3) リー群の表現論において，最も基本となる表現の一つが極小放物型部分群から誘導された主系列表現である．放物型部分群に付随する表現論の理解度を深めるとともに，表現論とスペクトル・散乱理論との関連を考察するために，一般化同時固有関数の特徴づけとその漸近展開について考察した．スペクトルパラメータが実かつ正則な場合にはすでに Kaizuka (引用文献②参照)によって，主系列表現に付随する一般化同時固有関数の Agmon-Hörmander 型空間による特徴づけと，散乱公式が得られている．スペクトルパラメータが実かつ特異な場合には，同時固有関数の漸近展開に現れる波が合流し退化が起こり，Agmon-Hörmander 型空間の指数を適宜退化に応じて取り換えることで，各種の不等式評価と散乱公式が証明できることが分かった（雑誌論文②参照).

＜引用文献＞

① R. Camporesi and E. Pedon, The continuous spectrum of the Dirac operator on noncompact Riemannian symmetric spaces of rank one, Proc. Amer. Math. Soc., 130, 507-516 (2001).
② K. Kaizuka, A characterization of the L^2-range of the Poisson transform related to Strichartz conjecture on symmetric spaces of noncompact type, Adv. Math., 303, 464–501 (2016).
③ R.S. Strichartz, Harmonic analysis as spectral theory of Laplacians, J. Funct. Anal., 87, 51–148 (1989).

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計 4 件）

① Koichi Kaizuka, Scattering theory for the Laplacian on symmetric spaces of noncompact type and its application to a conjecture of Strichartz, 276, 329-379 (2019) (DOI: 10.1016/j.jfa.2018.11.005) 査読有.
② Koichi Kaizuka, A characterization of the L^2-range of the Poisson transfrom with real and singular spectral parameter on symmetric spaces of noncompact type, Journal of Lie Theory,28, 581-607 (2018) 査読有.
③ 貝塚公一，書評「谷島賢二：シュレディンガー方程式 I, II（朝倉数学体系 5, 6）」，日本数学会「数学」，70，101-106 (2018)　査読有.
④ 貝塚公一，A characterization of the L^2-range of the Poisson transfrom with real and singular spectral parameter on symmetric spaces of noncompact type，数理解析研究所講究禄「スペクトル・散乱理論とその周辺」，2045，100–116，(2017) 査読無.

〔学会発表〕（計 4 件）

① 貝塚公一，A characterization of the L2-range of the Poisson transform with real and singular spectral parameter on symmetric spaces，微分方程式と幾何学，(2017).
② 貝塚公一，A characterization of the L2-range of the Poisson transform with real and singular spectral parameter on symmetric spaces of noncompact type, The 15th Linear and Nonlinear Waves (2017).
③ 貝塚公一，A charactrization of the L2-range of the Poisson transform with real and singular spectral parameter on symmetric spaces of noncompact type，第 149 回神楽坂解析セミナー，(2017).
④ 貝塚公一，Stationary scattering theory on symmetric spaces of noncompact type, Workshop on linear and nonlinear dispersive equations and related topics, (2017).

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：
研究者番号（8 桁）：

(2)研究協力者
研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。