

令和元年6月11日現在

機関番号：17102

研究種目：挑戦的研究(萌芽)

研究期間：2017～2018

課題番号：17K18726

研究課題名(和文)特殊関数論の圏化

研究課題名(英文)Categorification of special function

研究代表者

落合 啓之(OCHIAI, HIROYUKI)

九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授

研究者番号：90214163

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,500,000円

研究成果の概要(和文)：特殊関数の由来として、新たに分数階の偏微分方程式の対称性の決定と、その対称性による変数分離の機構を考察した。群作用による多様体の分解だけでなく、独立変数の選択が分数階の微分の場合には、ドラスティックな変更をもたらすことに気づいたのが我々の研究の成果であり、この成果の副産物として、解の今まで知られていなかった表示を与えることに成功した。連立系に対する基礎方程式(係数関数に対する拘束条件)も新しく与えている。これは多数の未知関数を含む非線形の連立系であるが、帰納的構造を見出すことで幾つかの場合は係数関数と対称性のリー環を決定できている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

特殊関数の一つの典型的な現れ方として、群作用に関する軌道分解によって偏微分方程式系から常微分方程式を得るプロセスがあるが、これを圏化するスキームを考えた。特に軌道分解が直既約とならない場合に軌道分解の複雑さを記述する関数系として特殊関数は、古典的に複比の持つ不変式的な構造と、プリュエア分解の持つ離散組み合わせ的な構造を併せ持つものであり、圏化によるアプローチに優位性があるものである。

研究成果の概要(英文)：Separation of variables is one of the origin of special functions. We determine the symmetry of a fractional partial differential equation, and discuss the scheme of the separation of variables in fractional case. As well as the decomposition of the manifold by the group action, the choice of independent variables are shown to be a key of the separation of variables, especially in the fractional case. As a corollary, we obtain a new expression of solution of such a fractional partial differential equation in terms Mittag-Leffler functions and generalized Wright functions. We also give the system of the fundamental equations on the coefficient functions, and with the help of inductive structure, we are able to determine the symmetry Lie algebra for a fractional partial differential equations.

研究分野：代数解析学

キーワード：特殊関数 リー環 変数分離 超幾何関数 一般ライト関数 対称性 分数階微分

### 1. 研究開始当初の背景

特殊関数というと超幾何関数やゼータ関数などが典型例であり、先行研究ではそれらがよく扱われている。本研究では、特殊関数として、Mittag-Leffler 関数やそれを拡張した一般ライト関数など、歴史は古いもののあまり馴染みのない関数の性質を調べた。超幾何やゼータを超えた関数の場合にどのような性質が保たれ、どのような新しい現象が起こるのかをこれらの関数の族で検証していったものである。

### 2. 研究の目的

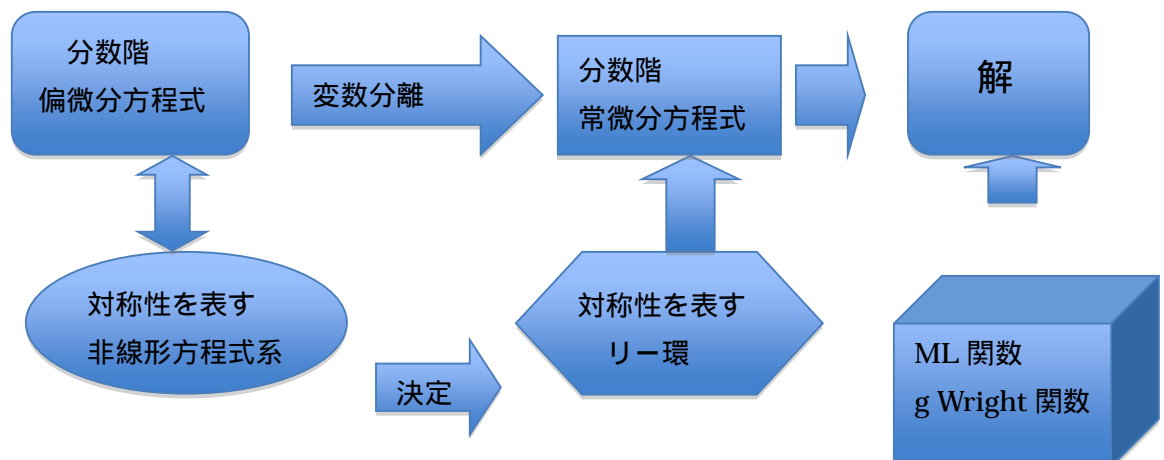
特殊関数論を他の分野との相互作用を意識しつつ展開することを探る。微分方程式は D 加群と、積分表示は局所系を係数とするホモロジーとコホモロジーのペアと考えられるような古典的な橋渡しを広げていくことを試みる。特殊関数でしばしば行われる変数分離の機構もリー群の作用による分解と対応付けて考えられる。分数階の微分作用素や微分方程式は、平行移動不変性を失うので微分作用素と同じ対称性による解析はうまくいかないが、その場合にどのように対称性を回復し、変数分離の機構を復活させられるかを解決する。また、特殊関数で何かを表示する、という一般的な問題に関して、アブストラクトに考察する。

### 3. 研究の方法

積分作用素で表される分数階の作用素や方程式は、端点を固定しているため、通常の微分作用素が持つような平行移動不変性を失っている。分数階微分作用素を扱う方法はいろいろ提案されているが、ここでは、幾何学化したり、代数的に取り扱ったりするアプローチを利用して、作用素の対称性を決定する機構そのものから作り上げる。

### 4. 研究成果

- (1) 特殊関数として、Mittag-Leffler 関数やそれを拡張した一般ライト関数など、あまり馴染みのない関数の性質を調べた。Uuganbayar 氏、Dorjgotov 氏(モンゴル国立大学)と共同研究では、先行研究で得られている関係式を整理するとともに新しい関数関係式を与えることができた。そして、これらの関係式がなす代数構造として、リー代数としての解釈を許すものがあることを確認した。特殊関数という先行研究では超幾何関数やゼータ関数などがよく扱われているが、その範囲を超えていった場合にどのような性質が保たれ、どのような新しい現象が起こるのかをこれらの関数の族で検証していったものである。
- (2) 次に、特殊関数を生み出す方程式の考察を行った。分数階の偏微分方程式系(連立系)に対する基礎方程式(係数関数に対する拘束条件)を、新しく導出した。これは多数の未知関数を含む非線形連立系である。その解を一般に与えることは難しいが、方程式の形を決めた幾つかの場合は帰納的構造を見出すことで、係数関数と対称性のリー環を決定できている。これは近年活発に研究されている先行研究の結果の多くを復元するとともに、対称性を持つ新しい分数階偏微分方程式を与えたり、対称性を完全に決定したりした。得られたリー環対称性は、結果としてリー群の対称性まで持ち上がり、したがって、大域的な対称性を、元の分数階の微分方程式が持っていることになる。これは、先験的には説明できないことであり、具体的な決定がもたらしてくれる副産物である。
- (3) 特殊関数の由来のひとつとして、対称性による変数分離の機構を考察した。これは古典的によく知られていて活用されている技術であるが、分数階になった場合に平行移動不変性が失われることに伴って、既存の理論で見直す点がある。群作用による多様体の分解は、通常の場合と同じであること、そして、独立変数の選択が分数階の微分の場合には、ドラスティックな変更をもたらすことに気づいたのが我々の研究の成果である。この後半の成果の副産物として、分数階の偏微分方程式の対称性を持つ解の、今まで知られていなかった表示を与えることに成功した。(1)の結果も用いている。以上の(2)(3)も Uuganbayar 氏、Dorjgotov 氏との共同研究である。



- (4) 特殊関数の一つの典型的な現れ方として、群作用に関する軌道分解によって偏微分方程式系から常微分方程式を得るプロセスがあるが、これを圏化するスキームを考えた。特に軌道分解が直既約とならない場合に軌道分解の複雑さを記述する関数系として特殊関数は、古典的に複比の持つ不変式的な構造と、プリュア分解の持つ離散組み合わせ的な構造を併せ持つものであり、圏化によるアプローチに優位性があるものである。特に、基礎体に依存せずに軌道分解できる場合だけでなく、基礎体の平方剰余の状況に軌道分解が大きく依存することは、拡大体を記述する数論でしばしば生ずることであるが、我々の事例でもそういった現象が発生する。この場合に、基礎体によらずに一斉に分解できる部分と、基礎体に依存する部分を切り分けて、基礎体に依存する「病理」の「芯」になっている部分を抽出することに、一部の事例では成功した。軌道分解の複雑さは多様であるが、芯になる部分は本質的にまだ一つの場合しか見つかっておらず、それは  $SL(2)$  のポレル部分群が冪単根基に随伴で作用する場合に他ならない。
- (5) 発表 では、伊吹山知義や Zagier のグループが研究している保形形式に作用する微分作用素と、小林俊行のグループが研究している対称性破れ作用素の両者の関係について、主催者から依頼されて講演した。特に、特殊関数で何かを表すということに関して、基軸となる考え方を整理して伝えた。この内容については英文の論文をまだ執筆していないが、講演のノートをまとめていきたい。
- (6) 発表 、発表 はともに、関数等式のガンマ因子に関する研究である。ただし、設定は大きく異なっていて、前者はセルバーグゼータ関数の関数等式のガンマ因子に関する権の研究に対する考察、後者は等質錐のゼータ関数の関数等式のガンマ因子に関する中島の研究に対する考察と、有限体上の概均質ベクトル空間の軌道のフーリエ変換に関する谷口の研究に対する考察である。設定は「局所対称空間、対称でない等質空間、ベクトル空間」と3つで大きく異なり、関与する体も「絶体、実数体、有限体」と、やはり異なるのであるが、これらの間に共通の構造を見て取ることができるのが圏化して議論することの優位性である。いずれの場合も、ヒルベルトの定理 90 のように因子が2つに割れることが特徴である。

## 5 . 主な発表論文等

### [雑誌論文](計 8 件)

Piotr Graczyk, Hideyuki Ishi, Salha Mamane, and Hiroyuki Ochiai, On the Letac-Massam Conjecture on cones  $Q_{A,n}$ , Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. Volume **93**, Number 3 (2017), 16--21. 査読あり。

Khongorzul Dorjgotov, Hiroyuki Ochiai and Uuganbayar Zunderiya, Lie symmetry analysis of a class of time fractional nonlinear evolution systems. Appl. Math. Comput. **329** (2018), 105--117. 査読あり。

Khongorzul Dorjgotov, Hiroyuki Ochiai, Uuganbayar Zunderiya, On solutions of linear fractional differential equations and systems thereof, accepted for publication in Fractional Calculus and Applied Analysis, **22** (2019), arXiv.1803.09063. 査読あり。

Khongorzul Dorjgotov, Hiroyuki Ochiai and Uuganbayar Zunderiya, Exact solutions to a class of time fractional evolution systems with variable coefficients, J. Math. Phys. **59** (2018), no. 8, 081504, 18 pp. 査読あり。

Shizuo Kaji, Alexandre Derouet-Jourdan and Hiroyuki Ochiai, Dappled Tiling, in Mathematical Insights into Advanced Computer Graphics Techniques, pp.59--72. Springer, 978-981-13-2850-3. 査読あり。

Yasuaki Hiraoka, Hiroyuki Ochiai, and Tomoyuki Shirai, Zeta functions of periodic cubical lattices and cyclotomic-like polynomials, accepted for publication in Advanced Studies in Pure Mathematics, Mathematical Society of Japan. 査読あり。

落合啓之, 市民講演会報告「コンピュータグラフィックスと数学」数学通信, 第 23 巻 4 号, pp13--30, 2019, 2 月発行. 査読あり。

落合啓之, ドレスト光子の対称性 in 「ドレスト光子に関する基礎的数理研究」マス・フォア・インダストリ研究 {¥bf 14} (2019) 149--156. 査読なし。

### [学会発表](計 17 件)

落合啓之, 超幾何関数のリー環対称性について, 研究集会「微分方程式と表現論」2018.12.26-27, 城西大学.

Hiroyuki Ochiai, Nilpotent orbits in complex simple Lie algebras and prehomogeneous vector spaces, ``Representation theory of reductive Lie groups and algebras'', 2019, 3.27-29.

落合啓之 「spanning tree の個数を RSK っぽく勘定してみる」CREST TDA MT, 別府ビーコンプラザ, 2017.5.11.

Hiroyuki Ochiai, Zeros of Eulerian polynomials, 研究集会「多重ゼータ関数の諸相」名古屋大学, 2017.8.22. 招待講演。

Hiroyuki Ochiai, Making a bridge between Ibukiyama and Kobayashi, 第20回整数論オースタムワークショップ, ホテルアベスト八方アルディラ, 2017.9.7.

落合啓之, Generating functions of growth of crystals and absolute automorphic forms, Zeta Functions in Okinawa 2017, 2017.11.20.

落合啓之,  $\exp(x+x^p/p)$  のテーラー展開係数の  $p$  進挙動, 早稲田大学整数論セミナー, 2017.12.1.

落合啓之, Gamma factors of Selberg's zeta functions and absolute zeta functions, 研究集会「多重三角関数とその一般化」神戸大学 2018.3.5.

落合啓之, An overview on Deligne exceptional series, 共同利用・短期共同研究「ドレスト光子の関連技術推進の為の基礎的数理研究」九大 IMI, 2018.3.8.

落合啓之, 特殊関数について, 研究集会「Langlands and Harmonic Analysis」いこいの村磯波風, 富山市, 2018.3.13.

落合啓之, 日本数学会市民講演会「コンピュータグラフィックスと数学」岡山大学, 2018.9.23. 数学会のホームページに動画あり。

Hiroyuki Ochiai, Algebraic analysis and related topics, Joint Mini-workshop between KU and NTNU, 2018.10.22.

Hiroyuki Ochiai, On matrix factorization of Gamma factors. 研究集会「Zeta Functions in Okinawa 2018」宜野湾市, 沖縄コンベンションセンター, 2018.10.24--26.

落合啓之, 糸島サイエンスキャラバン「日常に隠れている数学」糸島市役所, 2018.12.16.

落合啓之, ドレスト光子の対称性, 共同利用・研究集会「ドレスト光子に関する基礎的数理研究」九大 IMI, 2019.2.19.

Hiroyuki Ochiai, A remark on Hobson's formula, 「2018年度表現論ワークショップ」2019.3.12--13

落合啓之, CREST 体験記「数学連携ワークショップ Society 5.0 と数学3」日本数学会年会, 東京工業大学, 2019.3.19.

#### 〔図書〕(計1件)

落合啓之, 格別な関数の活躍, 第6章のコラム, pp172-173. in 杉浦光夫「ユニタリ表現入門」東京図書 2019. (全体のページ数は262ページ.)

#### 〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

#### 〔その他〕

ホームページ等

<http://user.math.kyushu-u.ac.jp/index.php?ochiai>

## 6. 研究組織

### (2) 研究協力者

研究協力者氏名: Khongorzul Dorjgotov, Uuganbayar Zunderiya (モンゴル国立大学)

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。