

令和 2 年 6 月 4 日現在

機関番号：14401

研究種目：挑戦的研究(萌芽)

研究期間：2017～2019

課題番号：17K18737

研究課題名(和文)ゆらぎの定理を基軸とした非平衡熱力学形式の構築を目的とする探索的研究

研究課題名(英文)An exploratory study toward a foundation of nonequilibrium statistical mechanics based on the fluctuation theorem

研究代表者

盛田 健彦(Morita, Takehiko)

大阪大学・理学研究科・教授

研究者番号：00192782

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,300,000円

研究成果の概要(和文)：「ゆらぎの定理」を満たす力学系の性質の精査からはじめ、それに基礎をおいた非平衡熱力学形式の構築に挑むことを目的としていたが、後半部分を扱うためには力学系の極限定理に関するより深い考察が必要であり、目標達成のためには準備不足といわざるを得ない。しかし、熱力学形式と転送作用素の解析的摂動論による様々な極限定理の証明法やランダム力学系とその直積力学系の定式化等の新たな見地が得られたことは意義深い。

研究成果の学術的意義や社会的意義

力学系の極限定理に対する転送作用素の解析的摂動による接近法は強力な方法ではあるが、扱う対象となる極限定理の多様性という点では不十分という感があった。本研究ではこれまであまり取り扱われなかった形態の極限定理についても踏み込んだことは意義がある。ランダム力学系の標本毎極限問題において直積力学系を定式化することによって、必ずしもノイズが独立でない場合にも適用可能な枠組みを構築したことの意義は大きい。

研究成果の概要(英文)：The aim of the project was to get a clue to establish non-equilibrium thermodynamic formalism based on the so-called 'Fluctuation Theorem' by careful investigations into statistical properties of chaotic dynamical systems. Now it turns out that I need to spend more time to study various kinds of limit theorems for dynamical systems. Therefore, I have to say that we are still in our way and we have just arrived at the threshold of the main part of the problem. But fortunately, the attempt enables us to obtain a new method for showing some limit theorems for dynamical systems via thermodynamic formalism and analytic perturbation of transfer operators and an idea to formulate sample-wise limit problems for random dynamical systems by introducing the notion of their direct products.

研究分野：エルゴード理論

キーワード：ゆらぎの定理 非平衡定常状態 熱力学形式 エルゴード理論 大偏差原理

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

本研究課題申請時における背景・動機は以下の通りである。

熱力学形式とは、力学系が与えられたとき、その相空間を熱的平衡系の状態空間とみなし、力学系(=相空間上の写像)を時間発展の規則ととらえ、不変測度、中でも熱力学における平衡状態に対応する測度の特徴付けや性質を利用して力学系の漸近挙動を確率論における極限定理の言葉を通して解析するための形式論である。

平衡熱力学、通常、熱力学と呼ばれている分野は物理学的にもほぼ完成されており、上述のようにそれを数学的に定式化し力学系のエルゴード理論などに応用する熱力学形式と呼ばれる形式論(むしろ広義に理解すれば分野)が存在するほどに至っていた。熱力学形式は1970年代以降の力学系理論には不可欠な道具となっていたといえよう。一方、熱的に非平衡系の理論についても重要度が高いものということが認知されており、長期にわたり研究されてはいたものの、これぞ決定版という理論は存在していなかったといつてよいだろう(現時点でもおそらく状況はそう変わっていないようである)。もちろん、時折、非平衡系研究に力を入れようという気運の高まりが見られる際に、単発的に幾つかの重要な定理(物理学的な意味で)や公式が編み出され、徐々にではあるが発展し続けてはいた。研究開始当初においてその気運の直近のものは、理論的などという意味に限定すれば知る限りでは1990年代後半からのCohen、Gallavotti、Ruelleらによる非平衡定常状態による試みだったと記憶している。一言でいうならば、非平衡統計力学の基礎付けを念頭に、熱力学形式を用いて得られたカオス的で構造安定な力学系における結果を基礎として、第2法則(=エントロピー増大則)を含む熱力学の基本法則を導出し、線形応答理論、揺動散逸定理との関わりを明らかにしようとする試みである。本研究代表者は2000年ぐらいまではこの流れに疎かだったのであるが、2001年に開催された数理物理学関係の研究集会でRuelleらの試みの中で使われる熱力学形式についての解説を依頼されたことをきっかけに興味をもつようになった。その講演を引き受けたときにも感じたことであるが、熱力学形式は物理学に端を発しているにもかかわらず、当時既に数学理論として定着しており、物理学側からはわかりにくいものになってしまっていたように思う。それからしばらくは自分自身の研究を遂行するためこの話題からは遠ざかっていたのはあるが、2015年前後に、実験系の物理関係者と話をさせていただく機会があり、「ゆらぎの定理」とよばれる、エントロピー生成の密度関数が満たすべき対称性を含む一連の関係式について質問を受けた。そのときは直ちに気づかなかったのだが、後日それがかつて解説を依頼されたRuelleらの試みの延長上にあることを認識するに至り、力学系の理論の立場から「ゆらぎの定理」の意義を明らかにすることを通して、物理学における平衡熱力学に対する数学理論である熱力学形式に相当する非平衡熱力学に対する非平衡熱力学形式の構築を最終目的として、そのために必要な数学的道具を準備しておくという今回の着想に至った。

### 2. 研究の目的

本研究課題申請時における研究目的は以下の通りである。

熱力学に起源をもつ統計力学の発展は、公理的な形式論として熱力学をまとめあげた熱力学形式(Thermodynamic Formalism)と呼ばれる数学理論を通して、カオス的力学系はもちろんであるが力学系理論全体を大きく進歩させた。一方で、物理学側の非平衡熱力学には現在もなお決定的な理論はない。1990年代後半から物理学側ではカオス的力学系から出発して非平衡熱力学を定式化しようという気運が高まっていた。とくに近年では「ゆらぎの定理」と呼ばれているものへの注目が高まっていたように思う。「ゆらぎの定理」自身は確率論の大偏差原理を彷彿させるものカオス的力学計に対するかなり抽象的な主張の定理である。考える系の状態空間が自然な体積測度を備えたコンパクト多様体の構造をもっていること、系の時間発展の規則がカオス力学系によって与えられること、その力学系が唯一つのSRB測度(体積測度による観測量の経験分布が定める不変測度)をもつこと、系としては散逸的であること(SRB測度は体積測度に絶対連続にはならない)というような条件は課してはいるものの、系自体が平衡系の摂動で与えられていることは一切仮定せずに行われているのである。しかも重要なことは、系が平衡系を外力で摂動したような系である場合の多くの例において、揺動散逸定理、Onsagerの相反定理が「ゆらぎの定理」からしたがうことが示されつつある。したがって、既存の理論を含んだ一般化として十分な意味をもった定理なのである。

本研究では、「ゆらぎの定理」を基軸として、力学系理論の側から平衡系の場合の「熱力学形式」に対応する「非平衡熱力学形式」を構築し、数学理論から物理理論へフィードバックする形で非平衡系を扱う方向を探索しようというものであった。具体的な研究目標としては：

(1) 力学系が特異点を有する場合、SRB測度の一意性が成り立たない場合、双曲性が一様ではない場合など、カオス力学系の条件を緩めた場合に、既存の「ゆらぎの定理」がそのまま成立するのか、修正することで意味のある定理となるのかを吟味し、「ゆらぎの定理」の成立条件を絞り込む。

(2) 揺動散逸定理(Green-Kubo公式)やOnsager相反定理といった基本的な結果を「ゆらぎの定理」から導出することが確立された例を精査して、数学的にどのような条件がこれを可能にしているのかを特定する。

(3) (1)、(2) の研究を糸口にして、非平衡熱力学の本質的部分を抽出し公理化して数学的形式論の構築を目指す。

### 3. 研究の方法

上述の目標を達成するため以下のような方法で研究の推進する予定であった。目標(1)と(2)については平行して研究を進めるが、初年度は(1)に、2年度は(2)に重点をおくことを想定していた。目標(3)については当初の段階で困難が伴うことは予想してはいたが、力学系に関する様々な極限定理について、熱力学形式と転送作用の解析的摂動論による接近法の適用範囲を拡張する統一的な枠組みを準備する必要性が生じ、2年度途中から目標(1)と(2)に関する工程を最優先し、目標(3)に向けた研究を継続して実施するための準備に力を入れる方向に舵を切ることになった。目標(1)~(3)それぞれについて当初の計画・方法をまず書き、その後の変更点について追加する形式で書く。

(1)について:「ゆらぎの定理」の主張は確率論における大偏差原理を彷彿させる主張をしている。実際に、その証明には大偏差原理が用いられており、力学系の大偏差原理の適用範囲が拡張されることによって定理の適応範囲も拡張できると思われる。力学系の大偏差原理については近年飛躍的に技術革新が進んでいたことから、その方面の進歩分を非平衡熱力学に反映させる好機ではないかと考えられた。そこで、熱力学形式における送作用素の解析的摂動論を用いた手法が、中心極限定理に留まらず様々なタイプの力学系極限定理に対して適用可能な力学系の適当なクラスを与えるための作業を行った。

「ゆらぎの定理」の背景にある様々な結果について相互関係を明確にしておく必要があるため、大偏差原理についての考察に時間を当初計画以上にかけてしまったが、そこで得られた知見は同時進行で実施していた力学系の Poisson 法則を含む研究に活かすことができた。

(2)について:ここで揺動散逸定理といっているのは、熱的平衡系に外力を与えた際の拡散係数として現れる「揺動ゆらぎ」と外力による散逸的力との関係を意味する。一般に揺動散逸定理は熱力学、流体力学に限らず、平衡系に外力が加わったときの応答の線形近似に関する等式を総称しており、「ゆらぎの定理」もそれぞれに応じたバージョンがある。「ゆらぎの定理」から「揺動散逸定理」を導くことのできる様々な例を解析することによって、「ゆらぎの定理」の標準形といえるものを得たいと考え、当初は2年度以降に力点を置く予定であった。しかし、研究途中において自己相関係数の減衰の速さがどの程度本質的なのかを確認する必要に迫られたことから、相関係数の減衰と極限定理との関係について精査することになった。

結局、目標(1)に思いのほか時間をかけたこともあるが、2年度半ばで、研究全過程を通して(1)と(2)に関する工程を着実に進めることを最優先課題とし、本研究課題終了後も継続的に当該研究を推進することが可能となるような準備を整えることを念頭におき、研究を継続するとともに、並行して推進している力学系の極限定理に関する課題の成果を応用する形で目標(2)が達成できるように研究の方向を修正した。

(3)について:(1)および(2)の進捗状況に大きく依存する。しかしながら、(1)、(2)の研究を進めながら、非平衡熱力学形式というものが存在するならば如何なる公理系に基づけばよいかということについては常日頃から継続的に試行錯誤を繰り返す必要があり、実際の構築作業は他の2つの研究結果を糸口とするにしても、研究期間全体を通して機会を見て推進しておく必要がある。本目標については、今回の研究ではようやく入り口に立つことができたというレベルであり、継続して研究を推進していく予定である。

### 4. 研究成果

最終年度については、本研究は探索的研究ということもあり、最終目標の達成が難しいということは当初より想定されてはいたが、2年度途中でそれが現実のものとなった。研究全過程を通して目標(1)と(2)に関する工程を着実に進めることを最優先とし、本研究課題終了後も継続的に当該研究が可能となるよう準備を整える方向に舵を切らざるを得なくなった。しかし、幸いなことに(1)、(2)の工程で扱う力学系の相関係数の減衰状況、中心極限定理、大偏差原理等は本研究と並行して推進している力学系の極限定理に関する基盤研究(B)の課題とも連動しており、双方の研究が他方の駆動力として作用し、本研究で得られた知見から以下の研究結果を得ることはできた。

初年度に得られた成果の一つ目は、参照測度に非特異な変換があり、参照測度に関する Perron-Frobenius 作用素が擬コンパクトとなるような Banach 代数で、本質的有界関数の空間に連続的に埋め込まれ、かつ可積分関数の空間で稠密となっているようなものが存在するという抽象的な仮定を満たす力学系の場合に局所極限定理を導く手法についてであり、2017年11月に開催された研究会「エルゴード理論とその周辺」での講演 “Expedient Banach algebras for piecewise expanding fibred systems” において報告した。もう一つは、転送作用の解析的摂動論を素朴な方法で見直すことによって、固定された1点のある自然な分割が定義する近傍への訪問回数の分布が、その近傍を1点に潰していくにしたがってどのような分布に近い

ていくかを Poisson 法則を一般化した形式で述べたことである。これについては、2018 年 3 月に岡山大学で開催された研究集会「岡山・広島 解析・確率論セミナー2018」の招待講演 “Some limit theorems for piecewise expanding dynamical systems via perturbed transfer operators” の中で紹介した。

2 年度は初年度に引き続き、カオス力学系の条件を緩めた場合に、既存の「ゆらぎの定理」がそのまま成立するのか、修正することで意味のある定理となるのかを吟味し、「ゆらぎの定理」の成立条件を絞り込む作業を継続した。力学系の極限定理とも密接に関連した数理現象を対象としていることから、本研究と並行して推進している基盤研究(B)とも連動しており、以下の研究結果に影響を与えている。

一つは、中心極限定理における極限分散の非退化性や局所極限定理に付随する観測量の分類に応用可能な結果で、狭義定常列におけるマルチンゲールコバウンダリー分解の一意性のエルゴード分解によらない別証明を与えることに成功したというものである。これについては、論文 “An alternative proof of the uniqueness of martingale-coboundary decomposition of strictly stationary processes” にまとめ、既存の証明が掲載されている学術雑誌 *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolina* に投稿したところ掲載が決定した。

もう一つは、決定論的な中心化を施した場合のランダム力学系に関する標本毎中心極限定理に関する結果で、ノイズとなるランダムネスの独立性も、出現する力学系が共通の不変測度をもつことをも仮定しない定式化を行なった。2018 年 11 月大阪大学で開催された研究集会「エルゴード理論とその周辺」での招待講演 “Sample-wise central limit theorem with deterministic centering for non-singular random dynamical system” で発表した。相関係数の指数減衰を示す Riemann 面のモジュライ空間上の力学計について、2019 年 2 月に早稲田大学理工学部で開催された研究集会「リーマン面・不連続群論」での招待講演 “The metric theory of renormalized Rauzy-Veech-Zorich inductions” の中で報告した。

最終年度は、決定論的な中心化を施した場合のランダム力学系に関する標本毎中心極限定理に関する結果で、ノイズとなるランダムネスの独立性も、出現する力学系が共通の不変測度をもつことをも仮定しない定式化と結果について 2 年度に行った研究を発展させたものを 2019 年 8 月末から 9 月頭に京都大学で開催された国際研究集会 “The theory of random dynamical systems and fractal geometry” での招待講演で報告した。また、ランダム力学系に通常の力学系とは異なる方法で直積系の概念を導入することによって、様々な標本毎極限定理を統一的に扱う試みについて 2019 年 11 月長岡で開催された研究集会「エルゴード理論と周辺」において “Nonsingular random dynamical systems and their direct products” という題目で発表した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 T. Morita	4. 巻 60
2. 論文標題 An alternative proof of the uniqueness of martingale-coboundary decomposition of strictly stationary processes	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Commentationes Mathematicae Universitatis Carolina	6. 最初と最後の頁 415--419
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.14712/1213-7243.2019.013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 4件/うち国際学会 1件）

1. 発表者名 盛田健彦
2. 発表標題 Direct product of nonsingular random dynamical systems
3. 学会等名 エルゴード理論とその周辺
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 T. Morita
2. 発表標題 Sample-wise central limit theorem with deterministic centering for nonsingular random dynamical systems
3. 学会等名 Research on the theory of random dynamical systems and fractal geometry（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 盛田健彦
2. 発表標題 The metric theory of renormalized Rauzy-Veech-Zorich inductions
3. 学会等名 2018年度「リーマン面・不連続群論」研究集会（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 盛田 健彦
2. 発表標題 Sample-wise central limit theorem with deterministic centering for non-singular random dynamical system
3. 学会等名 エルゴード理論とその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 盛田健彦
2. 発表標題 Some limit theorems for piecewise expanding dynamical systems via perturbed transfer operators
3. 学会等名 岡山・広島 解析・確率論セミナー2018 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 盛田健彦
2. 発表標題 Expedient Banach algebras for piecewise expanding fibred systems
3. 学会等名 エルゴード理論とその周辺
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----