

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 3 年 5 月 24 日現在

機関番号：34504

研究種目：挑戦的研究（萌芽）

研究期間：2017～2020

課題番号：17K19954

研究課題名（和文）代数幾何手法による計算複雑度解析の組織的研究の萌芽

研究課題名（英文）Organized research on computational complexity via algebraic geometry

研究代表者

徳山 豪（Tokuyama, Takeshi）

関西学院大学・理工学部・教授

研究者番号：40312631

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 4,900,000円

研究成果の概要（和文）：数学と計算理論の融合に向けて、特に数学の代数幾何学および表現論の研究者と計算理論の研究者の協働の体制を構築することを目的とし、GCT（Geometric Complexity Theory）を中心テーマとした共同研究を行った。東京大学駒場キャンパスにおいて隔月のセミナーを開催し、また、国際共同研究も推進し、ドイツのマックスプランク研究所における共同セミナーへの参加（徳山および連携研究者の西山、有木、玉置は招待講演を実施）、英国リバプール大学のIkenmeyer教授およびドイツマックスプランク研究所のFisher氏（博士学生）を招聘して、仙台、京都、東京などで講演会および共同研究を実施した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では、数学と情報科学分野の研究連携の推進を目指し、代数幾何学と群の表現論を計算複雑度解明に活用するGCTを中心とした、組織的な研究を行った。トップレベル研究者による定例セミナーと国際的な先端研究者や研究機関との国際共同研究を実施し、新しい成果を得た。一例として、一般化行列式を用いたWeylの公式の拡張は、数学的に基本的な公式の拡張であるのみならず、統計物理学や量子計算等の多くの分野への波及が期待される。また、数学と情報科学分野の連携に関して広く活動し、JST俯瞰セミナー等数多くの意義の高い啓蒙を行った。

研究成果の概要（英文）：Our grand challenge is the integration of mathematics and theory of computing. In particular, we aim at construction of collaborating research between researchers of mathematics (mainly algebraic geometry and group representation theory) and theory of computing, and pursue joint study focusing on GCT (Geometric Complexity Theory). We organized bi-monthly seminar held at Komaba campus of University of Tokyo. Moreover, we promoted international joint study, and participated to a joint seminar at Max Planck Institute in Germany, where Tokuyama and three other Japanese joint researchers gave invited talks. We also invited Prof. Ikenmeyer (U. Liverpool, UK) and Mr. Fisher (PhD student) to have joint study and series of lectures in Sendai, Kyoto, and Tokyo.

研究分野：理論計算機科学

キーワード：計算理論 代数幾何学 群の表現論 計算複雑度

## 1. 研究開始当初の背景

数学は情報科学の基盤である。しかし、いわゆる純粋数学は、高度に分化し、それぞれが非常に高い専門性を持ち、そのため、現代数学の成果を情報科学に活用するためには、数学の専門家と情報科学の専門家の相互理解に基づく協業が欠かせない。特に理論計算機科学は、数学と情報科学をつなぐ存在として、そのような協業を組織的に行うための重要な立場にある。

米国においては、このような純粋数学と情報科学の交流は進んでおり、多くのフィールズ賞受賞者がその後のキャリアで計算理論や AI 等の情報分野においても成果を挙げている。UC Berkeley における Simons Institute は、そのような数学と情報科学の交流の場である。ドイツにおいても、Max Planck Institute での数学と情報の交流が進み、新設された Lipzig の MPI for Mathematics in the Science が大きな交流の場になっている。日本においても、数理解析研究所や国立情報学研究所などでそのような交流があるが、世界的にみて活発とは言えない状況である。そのような状況において、特に世界的に注目されているトピックである GCT (Geometric Complexity Theory) は、計算理論の最大の未解決問題である P vs NP 問題などの計算階層の分離に対して、純粋数学でも代表的な先端分野である代数幾何学と群の表現論を用いるプログラムであり、テンソル空間の幾何を代数幾何学的に行う関係で、行列積のアルゴリズム理論や、学習理論にも影響があると考えられている。

日本においては、計算理論においては戸田のゲーデル賞を受賞した成果等、優れた研究者がおり、また、代数幾何学と群の表現論は、日本の数学のお家芸といってよい。しかしながら、この二つの分野の研究者には交流が乏しく、互いの高い研究能力を融合させる機会すら見いだせない状況であった。

## 2. 研究の目的

本萌芽研究においては、上記の背景にあるような現状を打破するため、純粋数学と理論計算機科学の本格的な組織的研究を行うというのが目的である。

研究代表者の徳山は、代数群(代数幾何学的な群)の表現論で数学の博士号をとり、そののちに理論計算機科学に転向して学会の先導的な研究を行っている研究者であり、数学、情報科学両面で大きな人的なネットワークを持っている。したがって、純粋数学と理論計算機科学の研究融合を行うことは経歴場も立場上も責務であると考えている。特に、30年以上前に研究代表者が学生時代に考案し、Tokuyama's formula という名で知られる群の表現論における成果は、近年大きく注目されており、Square Ice と呼ばれる氷をモデル化した統計物理学的な対象の解析やその情報科学への応用、柏原クリスタルと呼ばれる量子群の表現論に影響を持ち、更に行列式の一般化の計算論を通じて GCT にも密接に関連していると考えられている。

このような実績と人的ネットワークを活用し、GCT を中心にした研究テーマに取り組み、代数幾何学と群の表現論の最先端の成果を、計算階層理論などの理論計算機科学へ活用できる体制を構築することを目指す。

## 3. 研究の方法

研究組織として、代表者の徳山以外は連携研究者(のちに連携研究者の概念がなくなったため、研究協力者)であり、国内の連携研究者・研究協力者と共に、代数幾何学や表現論を中心とした数学と、理論計算機科学を中心とした情報科学の研究者による研究会(GCT セミナー)を継続して東京大学数理科学研究科において開催(平均して2か月に一回、ただし令和1年度以降はCOVID-19のため対面セミナーは休止)した。

セミナーの常時のメンバーと専門は、徳山、有木(大阪大学、表現論)、西山(青山学院大学、代数幾何学)、松本(東京大学、表現論)、垂井(電気通信大学、計算理論)、玉置(京都大学、兵庫県立大学、計算理論、量子計算)、高島(三菱電機、暗号理論)、平井(東京大学、最適化理論)であり、それぞれトップレベルの研究者である。これに適宜ゲスト講演者や学生が加わった。

また、海外研究者との交流も(COVID-19の影響が出るまでは)活発に行った。COVID-19の期間中は関西学院大学において、学生による計算機実験などで、得られた成果の検証を行った。

## 4. 研究成果

各年度の成果を記載する。なお、COVID-19の影響のため、令和2年度まで当初の期間を延長している。

平成29年度には、研究成果としては、本研究テーマと関連の深い行列積に関する論文 "Efficiently Correcting Matrix Products" を、国際専門誌 Algorithmica に出版した。これは、行列積の結果の検証において、従来の手法を理論的に改善するランダムアルゴリズムを与えたものであり、スウェーデン、イギリス、デンマークの研究者と共に行った国際共同研究の成果

である。また、物理モデルである Square Ice モデルに関する初期的な成果として、圧縮データ構造である ZDD (ゼロサプレス二分決定木) を用いた高速なエントロピー計算のシステムを構築した。

本研究の目的である、数学と計算理論の研究者の協働のため、特に数学の群論や表現論を専門とする最先端研究者及び学生への啓蒙を行うため、計算理論における数学の利用についての講演を、「表現論シンポジウム (2017 年、11 月 28 日)」において、徳山が行った。連携研究者の有木、西山も参加し、40 人ほどの若手研究者との討論を行った。

また、研究におけるメインピックである GCT に関して、現在世界で最も活発に研究を行っている若手研究者である、ドイツ Max Planck 情報科学研究所の Christian Ikenmeyer 博士を 2018 年 3 月 3 日 - 10 日の旅程で招聘し、東京での 2 回の講演会と、仙台での 3 日間のワークショップを開催し、研究分野の現状についての検討を行うとともに、国際的な共同研究を実施するための打ち合わせを行った。

平成 30 年度においては、Ikenmeyer 博士がオーガナイズした、Max Planck 情報科学研究所と Max Planck 数理科学研究所のジョイントワークショップに、本プロジェクトとして参画し、徳山、有木、西山、玉置、垂井が参加し、徳山、有木、西山、玉置が講演を行った。それぞれの講演題目は、Deformation of Determinants and Related Combinatorics and Computation (徳山)、Robinson-Schensted Correspondence and Flag Varieties (西山)、The RSK correspondence and its variants in the light of crystal graph theory (有木)、Beating Brute Force for Systems of Polynomial Equations over Finite Fields (玉置) である。

令和元年度においては、Christian Ikenmeyer 博士 (イギリス Liverpool 大学准教授に異動) 及び、Ikenmeyer 博士の共同研究者である博士学生の Nick Fisher 氏を 8 月 20 日から 28 日の期間招聘し、東京大学、京都大学、関西学院大学においてセミナーを開催し、共同研究を実施した。この招聘の費用は、本研究費から拠出した。また、研究代表者の徳山は、韓国で行われた国際ワークショップ AAAC2019 および WAAC2019 に参加して、研究成果を発表し、その旅費も本研究費から拠出した。

具体的な成果として、行列式の一般化に関する新しい成果を与えた。行列式へのワイルの指標公式の、行列式表現による一般化公式を得た。これは、1988 年に徳山によって与えられたデフォーメーション公式の新しい表現法であり、非常に美しい公式である。また、それに付随して、Dodgeson によって与えられた行列式アルゴリズムの完備化を与え、また、その高速化を目指す新たな方向性を与えることに成功した。これらの成果は、上述の国際ワークショップ WAAC2019 でその一部を発表し、また、国内のいくつかの研究会で招待講演を行った。

1 年間計画を延長した令和 2 年度には、前年度断念した国際会議での発表を行うべく準備したが、COVID-19 の感染拡大が、特にヨーロッパや米国で急速であり、国際共同研究は、オンラインによる研究発表や、セミナーへのオンライン参加を行うことに変更した。大目標の数学と情報科学の連携に向けて、徳山は JST が主催した「数学と科学、工学の共同に関する連続セミナー」(ZOOM によるオンラインセミナー)において、「数学の広がり：行列式と因数分解から幾何、計算理論、量子計算へ」という題目で講演を行い、JST 関係者を含む 60 名ほどの聴衆と討論を行った。また、学生による計算機実験を前年度に継続して実施した。

総合的な評価として、国内のトップレベル研究者による定例セミナー、様々な啓蒙的な講演活動、国際的な先端研究者や研究機関との国際共同研究を実施し、また、いくつかのインパクトのある成果が得られている。COVID-19 の影響を最終年度および追加年度に受けたが、当初の目的は十分に達成できたと考えている。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Man-Kwun Chiu, Matias Korman, Martin Suderland, Takeshi Tokuyama	4. 巻 28
2. 論文標題 Distance Bound for High Dimensional Consistent Digital Rays and 2-D Partially Consistent Digital Rays	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 28th Annual European Symposium on Algorithms	6. 最初と最後の頁 34-1 34-22
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4230/LIPIcs.ESA.2020.34	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 Jinhee Chun, Kenya Kikuchi, Takeshi Tokuyama	4. 巻 27
2. 論文標題 Consistent Digital Curved Rays and Pseudoline Arrangements	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 27th Annual European Symposium on Algorithms	6. 最初と最後の頁 32-1 32-16
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4230/LIPIcs.ESA.2019.32	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Nguyen Van Quang, Jinhee Chun, Takeshi Tokuyama	4. 巻 14
2. 論文標題 CapsuleNet for Micro-Expression Recognition	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 14th IEEE International Conference on Automatic Face & Gesture Recognition	6. 最初と最後の頁 1-7
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1109/FG.2019.8756544	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kohei Asano, Jinhee Chun, Atsushi Koike, Takeshi Tokuyama	4. 巻 28
2. 論文標題 Model-Agnostic Explanations for Decisions Using Minimal Patterns	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Artificial Neural Networks and Machine Learning - ICANN2019	6. 最初と最後の頁 241-252
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-030-30487-4_19	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hurtado Ferran, Korman Matias, van Kreveld Marc, Loffler Maarten, Sacristen Vera, Shioura Akiyoshi, Silveira Rodrigo I., Speckmann Bettina, Tokuyama Takeshi	4. 巻 68
2. 論文標題 Colored spanning graphs for set visualization	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Computational Geometry	6. 最初と最後の頁 262 ~ 276
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.comgeo.2017.06.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Gasieniec Leszek, Levcopoulos Christos, Lingas Andrzej, Pagh Rasmus, Tokuyama Takeshi	4. 巻 79
2. 論文標題 Efficiently Correcting Matrix Products	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Algorithmica	6. 最初と最後の頁 428 ~ 443
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00453-016-0202-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Fukuda Shun, Shioura Akiyoshi, Tokuyama Takeshi	4. 巻 26
2. 論文標題 Buyback problem with discrete concave valuation functions	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Discrete Optimization	6. 最初と最後の頁 78 ~ 96
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.disopt.2017.07.002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 徳山 豪
2. 発表標題 数学の広がり： 行列式と因数分解から幾何、計算理論、量子計算へ
3. 学会等名 JST俯瞰ワークショップ： 数学と科学、工学の協働に関する連続セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Tetsuo Asano, Naoki Kato, Takeshi Tokuyama
2. 発表標題 Near-unit distance embedding of points in the plane and space
3. 学会等名 WAAC 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takeshi Tokuyama
2. 発表標題 A q-Determinant Formula for Deformation of Weyl Character Formula
3. 学会等名 POSTECH Algorithm Research Workshop (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 徳山 豪
2. 発表標題 行列式の一般化とアルゴリズムや数理
3. 学会等名 南大阪 代数セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takeshi Tokuyama
2. 発表標題 Does Alice confuse Geometric Complexity Theory? Dodgson's Condensation Algorithm and Related Topics
3. 学会等名 Kyoto University Informatics Seminar (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takeshi Tokuyama
2. 発表標題 Deformation of Determinants and Related Combinatorics and Computation
3. 学会等名 MPI-INF and MPI-MiS joint workshop on Theoretical Computer Science and Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 徳山 豪
2. 発表標題 計算複雑度と数学との接点について
3. 学会等名 表現論シンポジウム 2017 (招待講演)
4. 発表年 2017年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Seokhee Hong, Takeshi Tokuyama (eds)	4. 発行年 2020年
2. 出版社 Springer Nature	5. 総ページ数 270
3. 書名 Beyond Planar Graphs	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	有木 進  (Ariki Susumu)  (40212641)	大阪大学・情報科学研究科・教授    (14401)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
連携研究者	西山 享 (Nishiyama Kyo)  (70183085)	青山学院大学・理工学部・教授  (32601)	
連携研究者	垂井 淳 (Tarui Jun)  (00260539)	電気通信大学・情報理工学研究科・准教授  (12612)	
連携研究者	松本 久義 (Matsumoto Hisayoshi)  (50272597)	東京大学・数理科学研究科・准教授  (12601)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
ドイツ	Max Plank Institute fur Informatics			
英国	University of Liverpool			
韓国	POSTECH			