

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成 24 年 5 月 31 日現在

機関番号：32682

研究種目：基盤研究（S）

研究期間：平成 18 年度～平成 22 年度

課題番号：18104002

研究課題名（和文）非線形非平衡反応拡散系理論の確立

研究課題名（英文）Mathematical Theory of Nonlinear-Non-equilibrium Reaction-Diffusion Systems

研究代表者

三村 昌泰（MIMURA MASAYASU）

明治大学・理工学部・教授

研究者番号：50068128

研究成果の概要（和文）：反応拡散方程式はすでに 20 世紀前半から集団遺伝学、生態学等の現れる数理モデルとして現れ、その定性的研究が数学の世界で行われたが、後半に入り、科学において大きなブレイクスルーが起こった。すなわち、非線形非平衡科学が新しく誕生し、そこに現れる様々な非線形非平衡現象を記述する数理モデルとして反応拡散系が物理、化学、生物等自然科学の分野に登場したのである。こうして、今や反応拡散系の理論研究は数学のみならず広く自然科学の世界で進められてきている。このような状況の中で、今回の研究課題は非線形非平衡現象の数理解明に向けて、数学・応用数学の視点から反応拡散系に現れる時空間パターンの解析手法の確立であった。この研究課題の元でえられた成果の例として、（1）散逸構造や自己組織化として現れるパターンダイナミクスを扱う「無限次元力学系の不変多様体理論」の構築、（2）非線形非平衡系特有の現象である「単純なパターンから複雑なパターンへの形成という、パターンの遷移過程を理解するための「遷移パターンダイナミクス解析理論」の構築、（3）非線形非平衡系にはダイナミックに変化する複雑なパターンや定常な形態を理解するための「特異極限法理論」の構築等である。この結果によって、非線形非平衡系に現れる時空間パターンの理論的解明に対して数学からの接近が現実となったのである。

研究成果の概要（英文）：Reaction diffusion equations already appeared as mathematics models which described population genetics, ecology and so on from the early 20<sup>th</sup> century, and the qualitative study was performed in the world of mathematics. In the late 20<sup>th</sup> century, there was a great breakthrough in sciences, that is, nonlinear non-equilibrium science and reaction diffusion equations appeared in natural sciences such as physics, chemistry, biology and other fields, as mathematics models describing various nonlinear non-equilibrium phenomena. Thus, the study of reaction diffusion system has been pushed forward not only in mathematics but also in widely natural sciences. The result in this study was able to establish the analytical technique of spatio-temporal patterns arising in reaction diffusion equations from viewpoints of mathematics and applied mathematics for mathematical elucidation of the nonlinear-non-equilibrium phenomenon. As examples, there are (1) the construction of "the invariant manifold theory of infinite dimension dynamical systems" to handle pattern dynamics appearing as dissipative structure and self-organization, (2) the construction of "analytical theory of transient pattern dynamics" to understand the transition process from a simple pattern to a complex one, which is a typical nonlinear-non-equilibrium phenomenon, and (3) the construction of "the singular limit theory" to understand complex dynamic patterns and stationary forms in nonlinear non-equilibrium systems. These results enable us to mathematically understand spatio-temporal patterns in nonlinear non-equilibrium systems.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	10,600,000	3,180,000	13,780,000
2007 年度	10,200,000	3,060,000	13,260,000
2008 年度	11,000,000	3,300,000	14,300,000

2009年度	11,200,000	3,360,000	14,560,000
2010年度	11,200,000	3,360,000	14,560,000
総計	54,200,000	16,260,000	70,460,000

研究分野：現象数理学

科研費の分科・細目：

キーワード：反応拡散方程式、非線形非平衡現象、自己組織化、進行波、フロント波／スポット波の相互作用、解の爆発、特異極限解析、無限次元力学系、大域的分岐理論

## 1. 研究開始当初の背景

周知のように、非線形非平衡現象の理論研究は1970年代ヨーロッパを中心に始まり、1980年代に入って、非線形非平衡系に現われる複雑多様な時空間パターン形成の解明に向けての研究が世界的に始まった。この新たな風は自然科学の諸分野、特に非線形物理学、非線形化学に多大な影響を与えた。様々な非線形非平衡現象を記述する数理モデルとして反応拡散方程式系が登場したが、数学の世界はほとんどに関与することがなかった。その理由は当時の数学からの興味は解の存在、一意性等基本的な性質であり、それから見れば反応拡散系は余りにも単純な非線形偏微分方程式であったからである。一方、解の漸近挙動、遷移挙動は非常に複雑であり、その解析は主に計算機シミュレーションに頼らざるを得なかった。やがて20世紀後半になり、非線形非平衡反応拡散系に様々な時空間パターンが出現することが信頼性の高いシミュレーション解析によって示された。このことが契機となり、反応拡散系の研究は広く数学・数理科学の世界で展開され、我が国において反応拡散系に現れる現象をモデリング、シミュレーションそして解析を相補的に用いる現象数理学的方法論が確立し始め、数学・数理科学から展開する反応拡散系の研究が次第に国際的にも評価を得られるようになった。具体的には4年に一回開催される国際数学会議(ICM)及び国際応用工業数学会議(ICIAM)において代表者である三村が招待講演を受けることになり、我が国における反応拡散系の理論研究の実績は諸外国に認められたのである。国内においても、非線形非平衡現象の解明に向けて、反応拡散系の理論研究は発展し、三村が代表者になり、1999年-2001年特定領域研究B「非線形非平衡現象を支配する特異性の解明」、続けて2000年-2001年京都大学数理解析研究所が開催するプロジェクト計画「反応拡散系：理論と応用」(代表者：三村)を推進することによって、反応拡散系の数理解析において大きく発展した。一方、海外活動としては、今回の研究課題と密接な関連がある「生命科学に現れる反応拡散系のモデリングと解析」が日仏共同事業(CNRS/PICS)として、2002年～2004年の4年間、その後同事業(CNRS

/LIA197)が2005年～2008年と遂行された。この事業には代表者そして分担者である俣野が日本側の組織委員として、分担者全員がこの事業のメンバーとして参加することになった。このように代表者、分担者による非線形非平衡現象解明としての反応拡散系の研究は国際レベルで発展し、非線形非平衡現象に現われる時空間パターンの理論的解明に対して多大な貢献をしてきたのである

## 2. 研究の目的

自然界に現われる非線形非平衡現象は驚くほど多種多様かつ複雑であり、その理論的解明は今や数理科学の研究課題の一つになっている。今回の研究代表者である三村が領域代表者となって「非線形非平衡現象を支配する特異性の解明」で特定領域研究(B)に申請し、1999年度より3年間数理科学的研究を推進してきたことはそれを示す1つの例である。この実績に基づいて、本研究の目的は、非線形非平衡現象の中で、特に時空間パターン(非線形散逸構造)解明の理論的支柱である反応拡散系理論を数学という視点から確立することである。これまで非線形非平衡現象の理論研究は主に実験解析、理論解析から進められており、数学からはほとんど接近することはなかった。その理由は、物理的な言葉を借りれば、平衡系の熱力学という静的な自然観から、非平衡系の熱力学、とりわけ非線形非平衡系を基盤とする動的な自然観への大きなパラダイムシフトに当時の数学は対応できなかったからであろう。しかしながら、非線形非平衡科学において様々な現象を記述するモデルとして、反応拡散系が登場することから、数学とりわけ非線形解析学の分野に新たな科学の風が吹き込まれたのである。今回の代表者である三村はこのような流れをいち早くとらえ、1990年代始めより非線形非平衡科学の理論研究者と研究交流を進める中で、反応拡散系の理論研究を数学という既存の枠を越えた学際的な視点から進めてきたのである。この研究での成果および他分野の共同研究の経験と実績は、非線形非平衡現象の解明というこれまで数理科学から距離

を隔てていた研究対象に対して、数学・数理解科学という分野から参加出来るという確信のもとに、非線形非平衡現象解明に向けて反応拡散方程式論が重要な理論的支柱になることを確信したのである。今回の申請は長年の経験、実績の上に立って、数学者集団による非線形非平衡現象解明に向かって、反応拡散系理論を構築することである。

### 3. 研究の方法

今回の研究課題を遂行するメンバーは代表者を含めて6名とわずかであるが、国際的に反応拡散系方程式の分野を先導している、我が国を代表する数学者である。三村(明治大)は反応拡散系に現れるパターンのダイナミクスを捉える特異極限解析、西浦(北大)は大域的分岐理論から、パターンの遷移過程の理論構築を担当し、柳田(東北大、2010年から東工大)は解の爆発という特異現象を扱う非線形楕円型方程式理論を担当し、俣野(東大)は反応拡散方程式において、パターンの遷移過程を記述する進行波に対して空間非一様場依存性の解明に有効な進行波理論、小林(広大)は生物系に現れる自己組織化パターンをモデル支援シミュレーション解析からの考察、栄(九大)はパルス波やスポット波の相互作用の無限次元力学系理論の構築を行なう。分担者の研究は基本的には夫々所属している機関(地域)で行なうが、各研究テーマはオーバーラップがあるものの、研究課題をより効果的に推進するために、全員が代表者の所属する明治大学附置研究機関である先端数理解科学インスティテュートの所員となって積極的に合同討議を行なうことである。一方、我が国における反応拡散系の研究者は諸外国に比べてその数が多いだけでなく、ほぼ全国的に様に分散して活躍していることから、各分担者は

北海道地区グループリーダー(西浦)
東北地区グループリーダー(柳田)
関東地区グループリーダー(俣野)
中四国地区グループリーダー(小林)
九州地区グループリーダー(栄)

と研究活動の他に、地区グループリーダーとなつて、夫々の地区の研究者と合同で研究課題に関連する研究集会を企画すると共に、分担者が組織委員となつて全国の大学、研究所で非線形非平衡系の数理解的研究をしている若手研究者、大学院生の教育目的のために毎年スクール形式で開催する。一方、今回の研究組織は数学者集団であるだけに自然科学の諸分野で非線形非平衡現象解明を追求している実験解析分野の研究者との連携が必要である。それにはこれまで基盤研究で分担者として参加して頂いた非線形物理、非線形化

学そして自己組織化生物学グループと連携を持って研究課題を推進する。

### 4. 研究成果

本研究は、非線形非平衡系に現れる時空間パターンを記述する反応拡散方程式モデルに対して、シミュレーション、数理解析を相補的に用いた理論およびその応用を展開するものである。

#### (1) 反応拡散系に対する特異極限理論とその応用

代表者である三村を中心として、非線形非平衡反応拡散系あるいは非線形交叉拡散(cross-diffusion)反応系に現れる空間パターンの時間変化を扱うために、系に現れるパラメータを無限小あるいは無限大にすることから極限系を抽出する特異極限理論を確立した。このことから、空間パターンのダイナミクスの解析が可能となった。

#### (2) 大域的分岐理論とその応用

非線形非平衡反応拡散系にはフロント、パルス、スポット解の衝突消滅、反射、合体等複雑な挙動が遷移ダイナミクスとして現れる。分担者である西浦、栄を中心として、このようなスポット解の相互作用を大域的分岐構造の視点から調べることから、分水嶺解(scattor)が重要な役割を果たすことを示し、余次元の高い分水嶺解から引くものへの連結ネットワークが複雑な衝突過程ダイナミクスの骨組みを形成していること明らかにした。この研究には、分岐構造探索アルゴリズムである AUTO を巧みに利用することが本質であり、そのために AUTO 開発を進めるとともに、非線形非平衡反応拡散系に対するアプローチとして計算機支援解析の1つの方法を確立した。

#### (3) 非線形楕円型方程式理論とその応用

反応拡散方程式には、有限時間爆発、有限時間消滅あるいは凝縮等の特異現象を示す解が出現する。分担者である柳田、俣野を中心として、特異解の定性的性質を調べるために、力学系と非線形楕円型理論を相補的に用いた新しい手法を確立した。このことから、藤田型方程式や、Gierer-Meinhardt 方程式に現れる特異解の漸近挙動の考察に成功した。

#### (4) 進行波理論とその応用

進行波解とは一定波形、一定速度で進行する波を特徴に持つ解であり、(2)と関連して、遷移ダイナミクスを理解する上で重要な役割を果たしている。この研究は古くから反応拡散方程式の1つの研究テーマであり、その歴史は古い。しかしながら、応用という現実の問題では非一様な空間環境のもとでの進行波の解析が重要である。分担者である俣野を中心として、反応

拡散方程式に現れる進行波解および速度が非一様な空間場においてはどのような影響を受けるかという問題に対して、その解析に有効な進行波理論を確立した。この理論からランダムな空間場での進行波の解析に成功した。

#### (5) モデル支援シミュレーション解析法とその応用

多くの生物系には自己組織化機能を持つことから様々なインテリジェンスを示すことが知られている。例えば、真正粘菌は「迷路解き」で良く知られている。分担者である小林を中心として、そのモデルとしてある非線形非平衡反応拡散系を導出して、グラフ上の最短経路探索問題の解法を開発した。以上の成果により、2008年イグノーベル賞(認知科学部門)が授与された。更に、このモデルから「齟齬関数による自律分散制御(Discrepancy Control)」という概念を抽出した。このことから、自己組織化機能を用いたロボット HAUBOT を開発した。

#### (6) 無限次元力学系の不変多様体理論とその応用

分担者である柴、西浦、代表者の三村を中心として、非線形非平衡反応拡散系に現れるフロント解、パルス解、スポット解のダイナミクスを理解するために、(2)とは異なる無限次元力学系における不変多様体理論を確立した。この理論を用いることから、それらの解のダイナミクスは分岐点近傍では普遍的に起こる現象であることを明らかにした。この結果の一例として次のことが明らかになった：これまで(KdV方程式のような)非線形分散方程式と(反応拡散方程式のような)非線形散逸方程式の解の特徴は、進行パルスの衝突交差、衝突消滅であると信じられていたが、必ずしもこれは正しくなく、反応拡散方程式においても、あたかも粒子のような衝突反射が起こる現象があることが示された。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 101 件)

- ① M. Bertsch, R. Dal Passo and M. Mimura: A free boundary problem arising in a simplified tumour growth model of contact inhibition, *Interfaces and Free Boundaries*, 査読有, 12, 2010, 235-250
- ② A. Fasano, M. Mimura and M. Primicerio: Modelling a slow smoldering combustion process, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 査読有, 33, 2010, 1211-1220
- ③ A. Aotani, M. Mimura and T. Mollee: A model aided understanding of spot pattern formation in chemotactic *E. coli* colonies, *Japan J.*

*Industrial and Applied Mathematics*, 査読有, 27, 2010, 5-22

- ④ P. van Heijster, A. Doelman, T. J. Kaper, Y. Nishiura, and K. Ueda: Pinned fronts in heterogeneous media of jump type, *Nonlinearity*, 査読有, 24, 2010, 127-157
- ⑤ E. Yanagida and L. Zhang: Speeds of traveling waves in some integro-differential equations arising from neuronal networks, *Jpn. J. Ind. Appl. Math.*, 査読有, 27, 2010, 347-373
- ⑥ Y. Du and H. Matano: Speeds of traveling waves in some integro-differential equations arising from neuronal networks, *J. Eur. Math. Soc.*, 査読有, 12, 2010, 279-312
- ⑦ K. Akiyama and R. Kobayashi: A mathematical model of cleavage, *J. Theor. Biol.*, 査読有, 264, 2010, 84-95
- ⑧ C.-N. Chen, S.-I. Ei and Y.-P. Lin: Turing Patterns and Wavefronts for Reaction-Diffusion systems in an Infinite Channels, *SIAM J. Appl. Math.*, 査読有, 70, 2010, 2822-2843
- ⑨ X.-F. Chen, S.-I. Ei and M. Mimura: Self-motion of camphor discs: Model and Analysis, *Networks and Heterogeneous Media*, 査読有, 4, 2009, 1-17
- ⑩ D. Hilhorst, R. van der Hout, M. Mimura and I. Ohnishi: A mathematical study of the one dimensional Keller and Rubinfeld model for Liesegang bands, *J. Statistical Physics*, 査読有, 4, 2009, 107-132
- ⑪ D. Hilhorst, M. Mimura and H. Ninomiya: Fast reaction limit of competition diffusion systems, *Handbook of Differential Equations: Evolutionary Differential Equations*, 査読有, 5, eds. C. Dafermos and M. Pokorný, Elsevier, 2009, 105-168
- ⑫ Y. Nishiura: Dynamics of Particle Patterns in Dissipative Systems-Splitting · Destruction · Scattering-, *SUGAKU EXPOSITIONS*, 査読有, 22, 2009, 37-55
- ⑬ H. Matano and F. Merle: Classification of Type I and Type II behaviors for a supercritical nonlinear heat equation, *J. Funct. Anal.*, 査読有, 256, 2009, 992-1064
- ⑭ S. Sato and E. Yanagida: Solutions with moving singularities for a semilinear parabolic equation, *J. Differential Eqs.*, 査読有, 246, 2009, 724-748
- ⑮ T. Nakagaki, A. Tero, R. Kobayashi, I. Ohnishi and T. Miyaji: Computational ability of cells based on dynamics and adaptability, *New Generation Computing*, 査読有, 27, 2009, 57-81,
- ⑯ S.-I. Ei, K. Ohgane, and H. Mahara: Neuron phase shift adaptive to time delay in locomotor control, *Appl. Math. Modelling*, 査

〔学会発表〕(計 318 件)

- ① M. Mimura: Segregation property in a tumor growth PDE model with contact inhibition, The 19th Workshop on Differential Equations and Its Applications, 2011 年 1 月 15 日、国立成功大学 (台湾)
- ② S.-I. Ei: Dynamics of pulses in two dimensional thin domain, 研究集会、Far-From-Equilibrium Dynamics, 2011 年 1 月 7 日、京都
- ③ R. Kobayashi: Mathematical Modeling of Crawling Animals, 9th iCeMS International Symposium "Meso-scale Control and Engineering of Self-Organized and Excitable Systems in Biology and Chemistry", 2010 年 12 月 3 日, Kyoto
- ④ M. Mimura: Self-Organized Patterns in Bacterial Colonies, International Workshop on Statistical Physics and Biology of Collective Motion, 2010 年 11 月 11 日, Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems (Germany)
- ⑤ R. Kobayashi: Mathematical Modeling for Pattern Formation in Nature, ISSCG-14, 2010 年 8 月 4 日, Dalian (China)
- ⑥ M. Mimura: Non-annihilation Dynamics in Reaction-Diffusion Systems, Mathematical Sciences Workshop at Riken, 2010 年 9 月 29 日、長野
- ⑦ 西浦 廉政: 遷移ダイナミクスにおける不安定性の思想、2010 年度日本数学会、2010 年 9 月 23 日、名古屋
- ⑧ Y. Nishiura: Rotational Motion of Traveling Spots in Dissipative Systems", SIAM DSPDEs'10 -Emerging Topics in Dynamical Systems and Partial Differential Equations-, 2010 年 6 月 2 日, Barcelona (Spain)
- ⑨ H. Matano: Global solutions for a 3D model of cellular electrophysiology, ReadILab conference on spatio-temporal patterns: from mathematics to biomedical applications, Archamps, 2010 年 3 月 16 日 (フランス) .
- ⑩ M. Mimura: Minimal mechanism for pattern formation in stressed bacteria, Interdisciplinary Workshop on Pattern formation in morphogenesis, 2010 年 1 月 14 日, IHES (France)
- ⑪ M. Matano: Homogenization limit of recurrent traveling waves in a 2D cylinder with saw-toothed boundary", The Second Chile-Japan Workshop on Nonlinear Elliptic and Parabolic PDEs, Tokyo, 2009 年 12 月 4 日、東京
- ⑫ M. Mimura: Model-aided Understanding

of Secrets in Biological Systems, Conference on the Mathematics of Darwin's Legacy, 2009 年 11 月 4 日 Lisboa (Portugal)

- ⑬ M. Mimura: Mathematical understanding of pattern dynamics, 第 19 回日本数理生物学年会基調講演, 2009 年 9 月 11 日、東京

(他 305 回)

〔図書〕(計 3 件)

- ① 西浦 廉政: 非平衡ダイナミクスの数理、岩波書店、2009, 299
- ② 柴伸一郎、山田光太郎、若山正人: パターン形成の数理、講談社サイエンティフィック、2008, 126
- ③ 小谷 眞一、俣野 博: 微分方程式と固有関数展開、岩波講座現代数学の基礎、2006, 218

〔その他〕

ホームページ等

<http://nnrds.math.meiji.ac.jp/>

## 6. 研究組織

## (1) 研究代表者

三村 昌泰 (MIMURA MASAYASU)

明治大学・理工学部・教授

研究者番号: 50068128

<http://home.mims.meiji.ac.jp/~mimura/>

## (2) 研究分担者

西浦 廉政 (NISHIURA YASUMASA)

北海道大学・電子科学研究所・教授

研究者番号: 00131277

<http://researchmap.jp/ynishiura/>

柳田 英二 (YANAGIDA EIJI)

東北大学・大学院・理学研究科・教授

2010 年度より

東京工業大学・大学院・理工学研究科・教授

研究者番号: 80174548

<http://www.math.titech.ac.jp/~yanagida/index.html>

俣野 博 (MATANO HIROSHI)

東京大学・大学院・数理科学研究科・教授

研究者番号: 40126165

小林 亮 (KOBAYASHI RYO)

広島大学・大学院・理学研究科・教授

研究者番号: 60153657

[http://www.kobayashi-lab.jp/kobayashi/index\\_k.html](http://www.kobayashi-lab.jp/kobayashi/index_k.html)

柴伸一郎 (EI SHIN-ICHIRO)

九州大学・数理学研究院・教授

研究者番号: 30201362

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~ichiro/index2.html>