

研究種目：基盤研究 (A)

研究期間：2006～2009

課題番号：18204002

研究課題名 (和文) リーマン面に関連する位相幾何学

研究課題名 (英文) Topological Studies around Riemann Surfaces

研究代表者

河澄 響矢 (KAWAZUMI NARIYA)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号: 30214646

研究分野：位相幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：リーマン面、位相幾何学、モジュライ空間、写像類群、マグナス展開

1. 研究計画の概要

実 2 次元多様体、写像類群およびリーマン面のモジュライ空間について一般理論と個別研究の相互作用から生まれる幾何学を構築する。関連して自由群の自己同型群、ゲルファント=フクス・コホモロジー、4 次元多様体、複素解析葉層、特殊函数等を研究する。自由群のマグナス展開と複素解析的ゲルファント=フクス・コホモロジーを研究の中心に据える。同時にリーマン面研究ネットワークの形成を目指す。

自由群のマグナス展開を、複素解析、ファットグラフ、計量付きグラフなどを用いて幾何的に構成することによって写像類群のジョンソン準同型および (ねじれ係数) 森田・マンフォード類などを、リーマン面のモジュライ空間の上の具体的な幾何学的対象に置き直して研究する。とくに、複素解析的に構成された調和的マグナス展開を用いてモジュライ空間の幾何学を展開する。

複素解析的ゲルファント=フクス・コホモロジーの未解決問題である閉リーマン面の有理型ゲルファント=フクス・コホモロジーについてのノヴィコフ=フェイギン予想の解決を目指す。

2. 研究の進捗状況

(1) タイヒミュラー空間のファットグラフによる胞体分割とマグナス展開の関連について大いに進展があった。R. ペナー氏、A. ベネ氏と代表者との共同研究によって、トリバレントなファットグラフの構造から自然に定まるマグナス展開が具体的に導入された。さらに、ここからえられるすべての次数のジョンソン写像をトレリ亜群の上で具体

的に記述することができた。その第一項は、森田・ペナー・コサイクルに一致する。第二項以上はまったく新しいジョンソン写像の表示を与えている。以上の結果は下記雑誌論文①として発表された。

(2) 写像類群の巡回部分群上の整係数リーマン・ロッホ公式についての連携研究者秋田と代表者の共同研究を完成させ、下記雑誌論文③として発表した。

(3) ねじれ係数森田マンフォード類の組み紐群への制限を計算し、自由群の自己同型群のねじれ係数コホモロジーについての (予想とまではいかないが) 「期待」を新たに提出した下記雑誌論文④を発表した。

(4) 調和的マグナス展開はリーマン面の普遍族の相対接束に標準的な第一チャーン形式を定義する。一方、アラケロフ・グリーン函数は同じ相対接束に計量を定める。これらの差を記述することが代表者にとって積年の課題であった。本年度、リーマン面のモジュライ空間の上に具体的な実数値函数であって、これらの差を与えるものを構成することができた。さらにこの実数値函数の第二変分を計算した。それによってアラケロフ・グリーン函数の定める第一チャーン形式を調和的マグナス展開の言葉で記述する (以前得られていた) 公式の別証も得られた。以上の結果をプレプリント arXiv: 0801.4218 としてまとめた。

(5) ノヴィコフ=フェイギン予想は未解決である。

(6) 関連分野の 7 つの研究集会を、リーマン面に関連する位相幾何学の研究交流および成果発表の立場から共催した。リーマン面に関連する位相幾何学の拠点形成に資するため

学術研究支援員を雇用した。

3. 現在までの達成度

③やや遅れている。

(理由)

ファットグラフ・マグナス展開の発見(進捗状況(1))およびリーマン面のモジュライ空間上の具体的な実数値関数の発見(進捗状況(4))など大きな進展も見られる。しかし、ノヴィコフ=フェイギン予想が解けておらず、具体的なリーマン面についての調和的マグナス展開の計算もはかばかしくない。

4. 今後の研究の推進方策

- (1) 調和的マグナス展開の第一変分およびファットグラフ・マグナス展開のホワイトヘッド・ムーブでの変分は「無限小的な」ジョンソン準同型を与えている。これらの解析を通して、ジョンソン準同型の像の評価を目指す。
- (2) 進捗状況(4)で得られた実数値関数について、その意味するところを明らかにしたい。
- (3) 調和的マグナス展開の定義には、(閉リーマン面の)グリーン作用素が繰り返し用いられている。グリーン作用素を再検討することで研究の突破口を開きたい。
- (4) リーマン面のモジュライ空間の上のさまざまな標準的2形式を具体的な二次微分として捉える。
- (5) ノヴィコフ=フェイギン予想については解決への努力を続ける。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 4 件)

- ① A. J. Bene, N. Kawazumi and R. C. Penner, "Canonical lifts of the Johnson homomorphisms to the Torelli groupoid," *Advances in Mathematics*, vol. 221, 627—659, (2009), 査読有。
- ② N. Kawazumi, "On the stable cohomology algebra of extended mapping class groups for surfaces," *Advanced Studies in Pure Mathematics* vol. 52, 383—400 (2008), 査読有。
- ③ T. Akita and N. Kawazumi, "Integral Riemann-Roch formulae for cyclic subgroups of mapping class groups," *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* vol. 144, 411—421, (2008) 査読有。
- ④ N. Kawazumi, "Twisted Morita-Mumford classes on braid groups," *Geometry and Topology Monograph series* vol. 13, 293—306, (2008) 査読有。

[学会発表] (計 7 件)

- ① 河澄響矢, Johnson's homomorphisms and the Arakelov-Green function, 研究集会「離散群と双曲空間の解析学とトポロジー」, 2007年12月, 京都大学数理解析研究所。
- ② 河澄響矢, 実および複素一次元のゲルファントフコホモロジー, 研究集会「複素微分方程式の定性的理論と関連する幾何」, 2007年6月, 東京大学大学院数理学研究科。
- ③ 河澄響矢, A higher analogue of the period matrix of a compact Riemann surface, *Topology Seminar, CTQM*, 2006年11月, University of Aarhus.
- ④ 河澄響矢, A higher analogue of the period matrix of a compact Riemann surface, *Workshop 'Groups of Diffeomorphisms 2006'*, 2006年9月, 東京大学大学院数理学研究科。
- ⑤ 河澄響矢, 第一森田マンフォード類を表すいろいろな微分形式について, 「第3回トポロジー・代数幾何蔵王セミナー」2006年7月, 蔵王ハイツ。