

平成 21 年 4 月 15 日現在

研究種目：基盤研究（A）

研究期間：2006～2009

課題番号：18204009

研究課題名（和文） 微分方程式の粘性解理論とその応用の研究

研究課題名（英文） Research on the Theory of Viscosity Solutions of Differential Equations and its Applications

研究代表者

石井 仁司 (ISHII, Hitoshi)

早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授

研究者番号：70102887

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：関数方程式，粘性解，ハミルトン・ヤコビ方程式，弱 KAM 理論，曲率流方程式，数理ファイナンス，比較原理

## 1. 研究計画の概要

以下の粘性解に関する課題について研究する。(1) 境界値問題の粘性解，(2) 弱 KAM 理論とハミルトン・ヤコビ方程式，(3) 最適制御，微分ゲームへの応用，質量移送の問題と関連した最適化問題，(4) 解の正則性，比較原理 (5) 幾何の問題に現れる非線形偏微分方程式への応用，(6) 数理ファイナンスへの応用

## 2. 研究の進捗状況

これまでの研究により，以下のような研究成果を挙げた。(1) ハミルトン・ヤコビ方程式に対する境界値問題に対して，理想境界の概念を導入して，一般領域でのディリクレ問題の定式化と可解性の条件の精密化に成功した。(2) 弱 KAM 理論に関連して，一意性集合の比較，非定常ハミルトン・ヤコビ方程式の解の時間無限大での漸近挙動の種々の条件下での確定，その収束の速さ，オープン集合上における解の定常性などについての成果を挙げた。弱 KAM 理論を応用して，陰的な障害物を持つハミルトン・ヤコビ方程式系について粘性解の比較定理を確立した。

(3) 確率最小作用の原理のゼロ雑音極限として現れる最適輸送問題の最小解や最大解を用いて，ある種の最大従属確率変数列の列の結合分布関数の最大値と最大解，及び，最小値と最小解を求めた。(4) 完全非線形 2 階楕円型方程式の  $L_p$  粘性解について，1 階微分に関して 1 次の増大度でその係数と非斉次項が非有界の場合，さらに 1 階微分の項の増大度が 1 次を超える場合も部分的に，弱ハルナック不等式を確立し，さらに，ヘルダ

ー連続性評価，リュービル原理，非有界領域での最大値原理を証明した。完全非線形楕円型方程式に対する強比較原理の証明に成功した。必ずしも一様放物型でない場合に，非線形放物型方程式に対する強比較原理の成立条件を考察した。関連して，球対称な係数を持つ退化楕円型方程式に非球対称な粘性解が存在する可能性があることを証明した。(5) 平面上の有界領域内における渦巻き状曲線の運動について，等高線法の拡張に伴って運動の一意性の議論を被覆空間の方法に適合させること，及び初期関数の構成法を考察した。(6) 総資産価値が予め規定した目標値を時間大域的に見て下回る確率を最小化する問題を研究し，リスク鋭感的確率制御問題でリスク回避的な場合の問題の双対問題として捉えられるということを示す研究を行った。

## 3. 現在までの達成度

おおむね順調に進展している。

(理由)

各課題について，研究の相当程度の進展があり，更に，弱 KAM 理論とその応用，解の正則性，数理ファイナンスへの貢献は期待以上のものである。

## 4. 今後の研究の推進方策

最終年度には，研究の総仕上げに向けて更に各課題の研究を充実させる。特に，弱 KAM 理論の関連は引き続き重点をおく。曲面の時間発展に関連して微分積分方程式は重要な課題と思われるので，今後力点を置きたい。

## 5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者に

は下線)

[雑誌論文](計 56 件)

H. Ishii, Asymptotic solutions for large time of Hamilton-Jacobi equations in Euclidean  $n$  space. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 査読有 25(2) 2008, 231-266.

H. Nagai, Stopping problems of certain multiplicative functionals and optimal investment with transaction costs, *Applied Math. and Optim.* 査読有 55(2007) 359-384.

H. Ishii, H. Mitake, Representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi equations with convex Hamiltonians. *Indiana Univ. Math. J.* 査読有 56 (2007), no. 5, 2159-2183.

[学会発表](計 104 件)

H. Ishii, Asymptotic solutions for large time of Hamilton-Jacobi equations,

International Congress of Mathematicians,

2006年8月26日 Madrid, Spain,

[図書](計 5 件)

Y. Giga, Birkhauser, Surface Evolution Equations - a level set approach  
2006年, 271 頁