

研究種目： 基盤研究 (A)

研究期間： 2006~2009

課題番号： 18204010

研究課題名 (和文) 生物の形づくりを模する微分方程式の解の定性的性質

研究課題名 (英文) Qualitative properties of solutions of differential equations modeling biological pattern formation

研究代表者

高木 泉 (TAKAGI IZUMI)

東北大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号： 40154744

研究分野： 非線型解析学

科研費の分科・細目： 数学・大域解析学

キーワード： 反応拡散系、パターン形成、幾何学的変分問題、進行波解、界面、曲面・曲線の運動、非一様な媒体。

1. 研究計画の概要

生物の形づくりのモデルとして提唱されている反応拡散方程式系および幾何学的変分問題の解の性質を「解の形状」を中心として解明することを目的として、以下の課題に取り組む。

(1) 発生生物学で最も広く用いられている Gierer と Meinhardt による活性因子-抑制因子系のダイナミクスを解明する。

(2) 反応拡散系に現れる界面の運動は動的なパターン形成を理解するうえで最も基本的なもののひとつである。具体的なモデル方程式系について、その進行波解の構造と振舞いを空間の非均一性との関係から調べる。

(3) 閉曲面上のパターン形成は、本質的に大域的な現象であり、しかも曲面そのものが運動する場合には、数学的研究は殆どなされていない。そこでシミュレーションを系統的に行い、どのようなことが起きているのかをまず把握し、それを厳密に調べていくための基礎的な数学的枠組みを構築する。

(4) 適当な束縛条件を満たす閉曲面族の中で曲げエネルギーを極小化するものは赤血球の形状を現している。このような幾何学的変分問題の停留点となる閉曲面や閉曲線を求め、その勾配流の解の振舞いを明らかにする。

2. 研究の進捗状況

本研究課題でこれまでの3年間に得られた主な結果は以下のとおりである。

(1) 非一様な環境下でのパターン形成： ギーラーとマインハルトが提唱した活性因子

—抑制因子系は発生生物学の形態形成のモデルとして広く用いられている。細胞や組織は内在的な非均一性をもつから、方程式中の様々な項は空間変数に依存するのが自然である。抑制因子の拡散係数が無限大になった極限系に対し、各項の空間依存性が安定な定常解のつくるパターンにどのように影響するかを明らかにした。さらに、他の反応拡散系においても拡散係数が空間変数に依存する場合の進行波解の振舞いを分類した。

(2) パターンの崩壊： ギーラー・マインハルト系を含むある種の反応拡散系では、いったん形成されたパターンが空間的に自明な状態に収束してしまうことがある。これをパターンの崩壊とよぶ。その原因は基礎生産項の性質にあることをつきとめた。

(3) 平面閉曲線の運動の解析： 赤血球膜の形態をモデル化した幾何学的変分問題の低次元類似として、一様な外圧にさらされた平面閉曲線が曲げエネルギーに駆動されて運動する現象がある。これは曲率の平方積分と面積汎関数の線型和を長さが一定であるという束縛条件化で極小化するという変分問題として定式化される。そのすべての停留点の表示公式を求めた。また、これまでに知られていた勾配流の構成法を改良し、さまざまな束縛条件を統一の実現する方法を提唱した。

(4) 曲面上のパターン形成： イソギンチャク的一种であるネマトステラは砂に足部を潜り込ませるため蠕動運動をする。生物学者と共同でその様子を真似る単純な数理モデルを試作した。これは円柱状の曲面において

進行波が伝播し、それに応じて曲面が変形するものである。その理論解析を始めたばかりである。

3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。

本研究課題は、実験家や理論生物学者との協同も含む異分野融合研究の側面をもつ。その部分は、ネマトステラの蠕動モデルの構成など当初計画よりも予想外の展開をして、大きく進展した。また、非一様な環境下におけるパターン形成に関しては、研究代表者、分担者並びに連携研究者がそれぞれの観点から着実に研究成果をあげている。計算機シミュレーションを系統的に行い、パターンのカタログを作成しウェブ上で公開するという計画がやや遅れ気味である。以上を勘案して研究課題全体としては、おおむね順調に進展していると判断する。

4. 今後の研究の推進方策

各グループとも重要課題を絞り込んで集中的に研究する。コンピュータシミュレーションに専念できる研究支援者を雇用し、データの蓄積を行い、かつウェブ上で公開する。4年間の総括と今後の展望を目的として国際研究集会を秋あるいは冬に開催する。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計55件)

- ① Kanako Suzuki and Izumi Takagi, “Behavior of solutions to an activator-inhibitor system with basic production terms”, Proceedings of Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2008, COE Lect. Note 14, Kyushu Univ. Global COE Program, 49–59 (2009). 査読有
- ② Kohtaro Watanabe and Izumi Takagi, “Representation formula for the critical points of the Tadjbakhsh-Odeh functional and its application”, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics 25 (2008), 331–372. 査読有
- ③ Shi-ichiro Ei, Hideo Ikeda, Kota Ikeda and Eiji Yanagida, “Eigenfunctions of the adjoint operator associated with a pulse solution of some reaction-diffusion systems”, Bulletin of the Institute

of Mathematics, Academia Sinica (New Series) 3 (2008), 603–666. 査読有

[学会発表] (計22件)

- ① 高木 泉, “Movement of planar closed curves by bending energy”, The 4th Geometry Conference for the Friendship of China and Japan, Chern Institute of Mathematics, Nankai University, Tienjing, China, 2008年12月23日.
- ② 高木 泉, “Pattern formation by an activator-inhibitor system in non-uniform environment”, Sixth East Asia PDE Conference, Wuhan University, China, 2006年5月17日.

[その他]

- (1) 本研究課題が運営するウェブサイトURL: <http://morpho.sci.tohoku.ac.jp/~morpho/>
- (2) アウトリーチ活動として、宮城県第一女子高等学校への出張授業「現代数学講演会：生物の形づくりの数理」を2007年12月6日に行った。