様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年６月６日現在

研究種目：基盤研究（Ａ）
研究期間：2006～2009
課題番号：１８２０４０１２
研究課題名（和文）　ホロノミック変形と非線形可積分系

研究課題名（英文）　Holonomic deformation and nonlinear integrable systems

研究代表者
岡本　和夫（OKAMOTO KAZUO）
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：４００１１７２０

研究成果の概要（和文）：本研究課題の目的はホロノミック変形とこれに付随する非線型可積分系の研究である。主な対象はパンルヴェ方程式とその他変数化であるガルニエ系であり、我々は退化パンルヴェ方程式のハミルトン構造を調べることにより、パンルヴェ方程式の研究に一応の締めくくりを与えることから研究を出発させた。研究代表者はこれまでの研究を「パンルヴェ方程式」と題する本にまとめた。ここにはパンルヴェ方程式とガルニエ系に関する、ホロノミック変形の観点からの研究がまとめられている。この分野の研究の歴史的な意味と数学的な意義から近年の研究の発展までに及ぶ内容が述べられている。研究代表者の多年にわたる研究の総括となっている。
この分野の若手研究者を支援することは本研究課題の第二の目的でもあるが、期間中に開催された国際研究集会では多くの若手研究者が彼ら自身の成果を発表する機会を得た。これは研究の新しい発展に資するものである。

研究成果の概要（英文）：The aim of present project is to study the theory of holonomic deformation and that of nonlinear integrable systems associated with holonomic deformation. The main subjects of investigation are the Painlevé equations and the Garnier systems, which are a generalization in the case of several variables of the Painlevé equations. At the beginning of researches of the present project, we have completed studies on Painlevé equations by considering the Hamiltonian structure of the two types of the degenerated Painlevé equations. The head investigator has published a book, entitled as “Painlevé equations”, written in Japanese, concerning to the theory of the Painlevé equations and the Garnier systems from a viewpoint of holonomic deformation. This contains a historical and mathematical meaning of these integrable systems, and recent development of studies on them.
The second aim of the project is to support younger researchers, not only Japanese ones but also foreigners, on theory of integrable systems; many of them have attended the three international conferences, mainly supported by the project, where they have read their own results.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	8,600,000	2,580,000	11,180,000
２００７年度	9,600,000	2,880,000	12,480,000
２００８年度	8,600,000	2,580,000	11,180,000
２００９年度	8,400,000	2,520,000	10,920,000
年度			
総　計	35,200,000	10,560,000	45,760,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：可積分系

１．研究開始当初の背景

パンルヴェ方程式が P. Painlevé により発見されたのは 100 年程前である。新しい超越函数を定義する非線型常微分方程式として研究が開始されたが、その中で特に 1907 年の R. Fuchs による仕事はその後の研究の重要な観点を与えるものであった。すなわち彼は、フックス型 2 階線型常微分方程式のモノドロミー保存変形を考察することによりパンルヴェ VI 型方程式を導出したのである。与えられたモノドロミーを実現する線型常微分方程式の存在を問うこと、すなわちリーマン・ヒルベルト問題、はもっと広い立場から現在も研究が続けられている。一方、R. Fuchs が考えたような線型常微分方程式に含まれるいわゆるアクセサリーパラメータの構造に関することは、当時フックス（ L. Fuchs ）の問題と呼ばれていた。その後 1920 年頃から 70 年代後半に至る期間ではむしろ数学の本流からは外れた対象であったことは確かであるが、現在では様々な立場からの研究が盛んに行われるようになった。パンルヴェ方程式やその一般化であるガルニエ系に限ってもこれらに関係する研究集会、研究論文もいろいろ公開されているし、関連する課題を目標に含む科学研究費の申請も少なくない。上述のモノドロミー保存変形とは、1970 年代以降に用いられ通用している用語であるが、非線型可積分系の立場から言えば、保存量として考察するべきものはモノドロミーだけではなくてストークス係数、基本解の接続係数などいろいろあるので、研究代表者は「ホロノミック変形」と総称することを提案している。本研究課題ではこの用語を使用している。最近までの非線型可積分系については、下記の論文集にまとめられている。特にパンルヴェ方程式とその多変数化であるガルニエ系（以下では簡単のため、これら２つの非線形完全積分可能系を単にパンルヴェ系と呼ぶ）に関しては同書中の研究代表者の論文「The Hamiltonians associated with the Painlevé equations, CRM Series in Math. Phys., "The Painlevé property One Century later", (2000), 735-787
がある。

本研究課題に関連する研究課題で研究代表者がこれまでに受けた科学研究費補助金の主なものは以下の通りである。

(1) 基盤研究(A)、平成9年〜12年、「非線型完全積分可能系と組み合わせ論の総合的研究」(課題番号(09304013)、以下同様)、研究経費（直接経費、単位千円、( )内は年度ごとの内訳、以下同様）18700(6500+5500+6100+6600)

非線型可積分系の研究に組み合わせ論の視点を導入し、発展させることを目標とした。成果は平成13年2月に報告した通りである。なお、上に引用した、研究代表者の論文が、この研究課題の成果のまとめとなっている。

(2)基盤研究(A)、平成14年〜17年、「パンルヴェ方程式の数理」(14204012)、37300(11400+8500+8900+8500)

この研究課題の目標は、パンルヴェ系を対象として、それらに関係する数学を多面的かつ総合的に研究することである。あわせて、いろいろな立場からの研究を総括するセンターを目指し、とりわけ新しい視点を持つ若い研究者の育成が急務であり、それが国内外の研究のなかでの当該研究の位置付けである、としている。成果は平成18年3月に報告した通りであるが、研究を通して本研究課題のテーマであるホロノミック変形の重要性が浮かび上がってきたことは特記しておく。

研究代表者は、パンルヴェ系を中心に非線型可積分系の研究を続けている。この分野の研究に長期的展望をもってとりくむことが可能であると確信しているが、ホロノミック変形をテーマとして本研究課題を企画したところである。その際、具体的な問題との関連で新しい問題意識を発掘し、理論的に発見させせることが重要であると考えた。当時は、広い意味での数理的実験により得られた成果が理論的結果を上まわっていた。これらの成果はさらなる研究の推進力となっているが、数理的な立場からの研究方法の開発と整備が課題である。これらの課題の達成を助けるため、研究代表者を中心として各分野の研究者を糾合し、若手研究者の育成も視野において、本研究課題による科学研究費の申請をすることにしたものである。

２．研究の目的

本研究課題の目的は、ホロノミック変形の立場から非線型可積分系を広く捉え、特にパンルヴェ方程式とガルニエ系、関連する離散、q-差分、楕円パンルヴェ系等について総合的な研究を行うことである。以下具体的に研究の目標を記す。

（１）<u>ホロノミック変形により新しい型の非線型可積分系を構成し研究すること。</u>

すべての型のパンルヴェ方程式が2階線型常微分方程式のホロノミック変形から得られることはよく知られているが、非線型偏微分方程式の可積分系であるガルニエ系の退化については個別の研究がなされているが、退化ガルニエ系の分類というような結果には至っていない。

（２）<u>リーマン・ヒルベルト対応についての幾何学的考察を通して非線型可積分系を研究すること。</u>

モノドロミーの空間と線型微分方程式系の空間の間の超越的な対応がリーマン・ヒルベルト対応により与えられるが、線型微分方程式系の持ついくつかの超越的な性質がこの対応により代数的に処理され、構造がより単純で見やすいもので表現される場合があることが最近知られている。例えば、パンルヴェ方程式やガルニエ系のハミルトン構造、その双有理正準変換、初期値空間などである。後者はある意味で実験的な計算で発見され構成されたものであり、実際にいろいろな分野で使われている。下記（３）に関係するが、これらの幾何学的意味付けにより、ガルニエ系について新しい視点からの研究を期している。

（３）<u>いろいろな立場からの手法により、パンルヴェ方程式とガルニエ系の構造を明らかにすること</u>。

ホロノミック変形は、線型微分方程式系のゲージ変換、すなわちシュレージンジャー変換、

から、自然に非線型可積分系のベックルント変換を導く。一方、パンルヴェ方程式でもシュレージンジャー変換では表されない双有理変換が知られている。これについては、もう少し広い範囲で線型微分方程式系を考察すれば、そのシュレージンジャー変換が対応するベックルント変換を自然に定義する、という岩崎氏の知見がある。ガルニエ系についても同様の考え方が適用できるだろうか。

研究の発展を目指すという視点から本研究課題の目的を整理すれば以下のようにまとめることもできる。

（イ）パンルヴェ方程式とガルニエ系の研究： ホロノミック変形とガルニエ系の双有理正準変換、パンルヴェ方程式とガルニエ系のモノドロミー可解な解、初期値空間の構成、等の理論研究

（ロ）より広い非線型可積分系の研究に向けての発展：ガルニエ系の階層構造とその離散化と q−差分化、野海・山田系の研究、等の発展的研究。

（ハ）ホロノミック変形の研究： 離散的あるいは q−差分的な方程式への拡張等の幾何学的手法による研究、すなわちホロノミック変形の離散化、等。

　研究代表者を中心とする本研究課題のグループは、今回の研究課題もこれまでの研究に引き続いて非線型可積分系の研究を総括するセンターを目指すものとして位置付けている。本研究の特徴として、対象が明確であるだけ手法は限られていないし、逆に可能な方法は解析的なもの、幾何的なもの、代数的であれ、自由に設定する。そのため、広い分野の研究者に協力を求め、特に大学院生を中心とする若手研究者の積極的な参加を求める。

３．研究の方法

「研究目的」欄に記した３つの目的を目指して研究を進めるためには、これらを念頭に置きつつ横断的かつ相互的な研究を遂行することが肝要である。その点を考慮して次のような３つの研究グループを構成した。

(a)　　非線型可積分系の構成。［目的（１）に対応］

(b)　　ホロノミック変形の幾何学的理論。［目的（２）に対応］

(c)　　非線型可積分系の研究。［目的（３）に対応］

　本研究課題全般にわたる総合的研究の推進と各グループの研究の総括は研究代表者が行った。目的の達成を目指して具体的な研究の推進と現状の把握は、分担者の意見をうかがいつつ、研究代表者が研究経費も含めた責任をもち、研究分担者は国内外の研究者と連絡、共同研究を積極的かつ指導的に行い、研究代表者の研究を自立的に分担した。なお、研究分担者は平成20 年度以降連携研究者として研究に参加することとしたが、グループや役割等は変更していない。

研究グループと本研究課題の研究代表者、研究分担者の関係は以下の通りとした。

(a)離散系、q−差分系の非線型可積分系が、例えばq−パンルヴェVI型方程式がそうであるように、ホロノミック変形から組織的に現れるものであるかを調べた。特に楕円パンルヴェ方程式の研究は坂井秀隆氏と若手研究者が研究を遂行した。

(b)この課題の研究を進めるため海外共同研究者としてJean-Pierre RANIS氏が研究期間中研究協力者とした。

(c)これは研究代表者にとって中心的課題であるので、海外共同研究者のAlexander KITAEV氏、研究分担者の大山陽介氏、坂井秀隆氏との共同研究を、研究期間を通して進めた。

　繰り返しになるが、本研究課題の遂行が広く非線型可積分系の研究者が集まる研究センターの構築と継続発展の一助となるように努める。

4．研究成果

研究代表者の得た結果を中心に，本研究課題による研究の成果を述べる。

(1) 論文リストの①にあるものは、研究分担者（連携研究者）と川向洋之氏による共同研究をまとめたものである。研究代表者は、Studies on the Painlevé equations と題した一連の論文で、パンルヴェ方程式の変換群がアフィンワイル群で記述できることを示し、その具体形も与えた。これに先立ち研究代表者はパンルヴェ方程式に付随する葉層構造を調べ、いわゆる初期値空間を構成した。その後の坂井秀隆氏の研究に依れば、このような初期値空間を持つ微分方程式は 8 種類有り、そのうちの 6 個はパンルヴェ方程式の一般の場合であり、残りの 2 個はⅢ型パンルヴェ方程式の退化した場合である。一般のケースについては上述の研究代表者の仕事によりすべて解っているが、退化した場合について調べ上げ、この方向でのパンルヴェ方程式に関する研究を完全なものにしたのがこの論文である。具体的には研究代表者の手法により初期値空間をパンルヴェ方程式から直接構成し、また対応するホロノミック変形の理論を補完した。退化した方程式についてもその対称性を決定し、多項式解等の代数解や古典解の構造を求めた。併せて各方程式の定める解析関数の古典超越函数に対する超越性を示した。具体的な内容等については
http://www.ams.org/mathscinet/search/publdoc.html?pg1=INDI&s1=209911&vfpref=html&r=1&mx-pid=2277519
においてレビューされている。

(2) 研究代表者のパンルヴェ系に関する研究の成果をまとめたものが図書リストの①である。これはホロノミック変形を中心にパンルヴェ方程式とガルニエ系の理論を紹介した学術書で、研究代表者による講義録「パンルヴェ方程式序説」（上智大学講究録 1985）をもとに新しい結果と古典的ではあるが日本語では読めない結果についても加えて、1 冊にまとめたものである。日本語ではもちろん海外においてもこのような書籍はない。その意味でも本研究課題の成果として第一に挙げたい。

(3) パンルヴェ方程式の対称性に関する上記の研究において、研究代表者はパンルヴェ方程式のハミルトニアンの満たす微分方程式を求めこれを本質的に使った。これと同じ手法でガルニエ系の対称性を決定することは当然試みられるべきであるが、近年はこれと異なる方法が主流であり、若手研究者の研究もそのような方法に依っている。もちろん進歩した手法による研究は大切であるがこれは若手に任せて、研究代表者はガルニエ系のハミルトニアンの満たす偏微分方程式形を決定するべく研究を進めた。この研究による部分的な結果は既に研究集会①で発表した。

(4) q-パンルヴェ系の研究は坂井秀隆氏により、パンルヴェ方程式の解析的な解の研究は大山陽介氏により遂行されたが、これらの結果は論文リストにある通りである。なお、パンルヴェ方程式の解であるパンルヴェ超越函数の大域的な振る舞いも大切な課題であり研究が進んでいるが、ここでは本研究課題の遂行に研究支援員として参加した佐々木良勝氏の論文

Y. Sasaki：Value distribution of the fifth Painlevé transcendents in sectorial domains, J. Math. Anal. Appl. 330 査読有 (2007) 817-828

を引用しておく。

(5) 本研究課題では、若手研究者の研究支援もの目的の 1 つである。彼らがその成果を国際的に発表できる機会を与えるべく、研究集会のリストにある 3 つの国際研究集会に派遣した。彼らはその機会に研究発表を口頭ある

いはポスターにより行った。そのテーマを一々記すことは省略する。②の国際研究集会では25件の講演（うち海外研究者による招待講演12）とポスターセッションに国内外の若手研究者が参加した。①の国際研究集会では，全体の講演数 20 のうち我が国からは研究代表者を含めて 7 件の講演があった。特にフランスの若手研究者による講演は新しい研究の方向を示すものであった。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

① Y. Ohyama, H. Kawamuko, H. Sakai and K. Okamoto: Studies on the Painlevé equations V, third Painlevé equations of the type P_III(D_7) and P_ III(D_8), J. Math. Sci. Univ. Tokyo 13 査読有 (2006) 145-204
② H. Sakai: Problem: discrete Painlevé equations and their Lax forms, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B2 査読有(2007) 195-208
③ H. Sakai: Lax form of the q- Painlevé equation associated with the A^(1)_2 surface, J. Phys. A39 査読有(2006) 12203-12210
④ Y. Ohyama: Monodromy evolving deformations and Halphen' s equation, CRM Proc. Lecture Notes, 47 査読有 (2009) 343-348
⑤ K. Kaneko and Y. Ohyama: Fifth Painlevé transcendents which are analytic at the origin, Funkcial. Ekvac. 50 査読有(2007) 187-212
⑥ Y. Ohyama: Rational transformations of confluent hypergeometric equations and algebraic solutions of the Painlevé equations: P1 to P6, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B2 査読有(2007) 137-150

〔学会発表〕（計３件）
連携研究者に限っても多数になるので，研究代表者の国際会議における発表のみ記す。
① K. Okamoto: The differential equations satisfied by the τ-functions of the degenerate Garnier systems, 国際研究集会「Journées franco-japonaises en l'honneur de Kazuo Okamoto autour des équations de Painlevé」，ストラスブール大学，フランス，2008 年 11 月 11 日
http://www-irma.u-strasbg.fr/annexes/conferences/okamoto/
②K. Okamoto: From Strasbourg to Tokyo, 国際研究集会「From Painlevé to Okamoto」，東京大学，2008 年 6 月 11 日
http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~tudateru/okamoto60/
③K. Okamoto: Introduction to the Painlevé equations, （4 回講義）Workshop on Painlevé equations and monodromy problems，ニュートン研究所，ケンブリッジ，イギリス，2006 年 9 月 11 日，12 日
http://www.newton.ac.uk/webseminars/pg+ws/2006/pem/pemw01/

〔図書〕（計１件）
①岡本和夫，「パンルヴェ方程式」，岩波書店，2009 年，300 ページ

〔その他〕
ホームページ等

http://poisson.ms.u-tokyo.ac.jp/~okamoto/

６．研究組織
(1)研究代表者
岡本　和夫（OKAMOTO　KAZUO）
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：４００１１７２０

(2)研究分担者
蟹江　幸博（KANIE　YUKIHIRO　）
三重大学・教育学部・教授
研究者番号：１００９３１２１
（H20－H21：連携研究者）
坂井　秀隆（SAKAI　HIDETAKA　）
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号：５０３２３４６５
（H20－H21：連携研究者）
大山　陽介（OHYAMA　YOUSUKE　）
大阪大学・大学院情報科学研究科・准教授
研究者番号：１０２２１８３９
（H20－H21：連携研究者）