様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　３月３１日現在

研究種目：基盤研究（Ｂ）
研究期間：２００６～２００９
課題番号：18340012
研究課題名（和文）　安定性、 大域的ガロア表現と非可換Ｌ関数

研究課題名（英文）　Stability, Global Galois Representations and Non-Abelian Zeta Functions

研究代表者
翁　林（WENG　LIN）
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：60304002

研究成果の概要（和文）：(0) Riemann 面の一般非可換類体論を構成した；(1) 代数体と関数体の非可換ゼータ関数を導入した；(2) 格子の安定性と，跡公式の理論で用いられる Arthur の解析的截頭との本質的な関係を明らかにした；(3)非可換ゼータ関数と Langlands の Eisenstein 級数の関係を明らかにした；(4) 拡張された Rankin-Selberg ＆ Zagier 法を用いて，簡約群Gと，その極大放物部分群Pの組(G,P)に対して，一般的な可換ゼータ関数を導入した．加えて，対応するゼータ関数の Riemann 予想に関して，Weyl 群の対称性を含む対称性の果たす役割を明らかにした；(5) 一般類体論をはじめとする数論の研究に，安定性の概念を初めて系統的に導入した．

研究成果の概要（英文）：In terms of mathematics, there are some remarkable advances: (1) We introduce genuine non-abelian zeta functions and study their basic properties; (2) We intensively study semi-stable lattices and expose their relation with Arthur truncation of trace formula; (3) We find a natural relation between our theory of zetas and Langlands' theory on Eisenstein systems; (4) This then with an advanced Rankin-Selberg and Zagier method leads to the discovery of abelian zetas associated to (reductive group, maximal parabolic subgroup)s and hence an exposition of a hidden role played by symmetry in the Riemann Hypothesis; (5) We initiate a program on using stability to establish a general (non-abelian) Class Field Theory for p-adic number fields and function fields over finite fields, under the framework of Tannakian category theory.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	3,200,000	0	3,200,000
２００７年度	2,900,000	870,000	3,770,000
２００８年度	3,000,000	900,000	3,900,000
２００９年度	3,300,000	990,000	4,290,000
年度			
総　計	12,400,000	2,760,000	15,160,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：非可換 L-関数、Eisenstein 級数、Galois 表現、安定性、リーマン予想

１．研究開始当初の背景

前の研究(安定性リーマンロッホから非可換ゼータ関数へ)により，多くの本質的な進展があった． 成果のうち重要なものを挙げると，以下の通りである．

（１） Narabhimah-Seshadri対応と淡中圏の理論により，リーマン面に対する非可換類体論を確立した

（２）代数体上の格子のコホモロジー理論を導入，Serre双対性定理とRiemann-Roch定理を証明した．

（３）大域体に対し，新しい（しかしこれこそが純正の）非可換ゼータ関数を定義し，有理型関数としての解析接続及び関数等式などの基本的性質を証明．更に階数が１の場合，非可換ゼータ関数は代数体に対するDedekindゼータ及び曲線に対するArtinゼータと一致することを証明した．

（４） 安定性に関して次の２条件は同値であることを証明した:

(a) 階数２の格子が安定．(b) 対応するモジュラー点のスプへのSiegel距離は１以上である．

（５）代数体に対する階数２の非可換ゼータ関数は修正リーマン予想を満たすことを証明した．

（６） 曲線上の半安定ベクトル束のモジュライ空間に対するBrill-Noether集合を導入し，関数体の非可換ゼータ関数に関する一般的な公式を証明した．

（７） 非可換ゼータ関数及びEisenstein級数の間の本質的な関係を見出し，一般な非可換 L 関数を導入し，Eisenstein級数に関するLanglandsの理論を用いて基本的な性質を証明した．

非可換 L 関数は粗く言えば２つの部分すなわち，可換な部分と本質的な非可換な部分からなり，可換な部分は保型 L 関数である．また全ての保型 L 関数は我々の非可換 L 関数の可換部分とみなすことができる．

２．研究の目的

数論における非可換理論の研究は WeilとArtinの基本的な仕事によって始まった．
Weil の方法は Mumford や Seshadriなどの仕事によって最終的には，いわゆるSeshadri-Narasimhan 対応として完成された．すなわち代数曲線の基本群のユニタリー表現と安定な双曲的ベクトル束との一対一対応の存在が証明された．そして現在では，それは小林-Hitchin 対応として高次元化されている．一方，Artin のL 関数は Langlands 計画に関する膨大な研究へとつながっている．

我々の研究は，最近我々が定義した代数体の整数環における安定な格子という概念および非可換 L 関数を適用して，大域体の非可換的とも言うべき数論の側面を研究することである．三の側面がある。

第一，ミクロのレベルでは安定な格子をガロア群の大域的でないアデール表現と関連づけたい．すでに得た，ミクロの相互法則と呼ぶべき結果に基づいて，大域体の類体論を構築したい．具体的にはたとえば，大域体上の淡中圏の理論を進めて，「存在定理」や「大域的な相互法則」を証明することが目標である．今の場合，「存在定理」は「有限次ガロア拡大はある有限生成の部分淡中圏と一対一に対応する」という形をとるであろうし，「大域的相互法則」はガロア群とファイバー関手に付随する自己同型群の間の自然な同型から従う．

第二，非可換 Euler 積と呼ばれる構造をより詳しく調べて，非可換 L 関数の構成のための確かな基礎付けをしたい． 可換数体論における相互法則とは，可換な L 関数の可換なEuler 積に基づいたある分解法則と同値であることを想起したい．
従ってこの部分は非可換 Euler 積及び非可換 Hecke 理論を，自然な仕方で導入することに相当する．このため，Arthurのtruncation，Langlandsのスペクトル分解とEisenstein 級数に関するの理論，さらに，Rankin-Selberg の方法，および申請者自身による発見である幾何学truncation と安定性，双曲的帰納法などを駆使して着実に進展したい．

第三，（可換，あるいは我々の導入した非可換の）L 関数の基本的な性質，特に関連するリーマン予想（適当に修正したリーマン予想 MRH）を研究したい（証明したい）．
特に，階数２の代数体に付随した(非)可換ゼータ関数についてリーマン予想(MRH)の証明を高階まで正しい枠組みを見つ

けで拡張したい.

本研究は, 大域体の非可換数論へのきわめて有望な新しい研究の方向を開拓するものである.

３．研究の方法
大域と局所体を研究するため, 私たちは幾何学的アプローチを使用したいと思います。より正確に、すべてのおもしろい数学の対象の中で, 安定性を使用することによって、管理可能なあるサブクラスは選択することができて、したがって、私たちが新しい、しかし、本物のおもしろい, 特に非可換な, 算数の不変量をもたらすと予想されます。 例えば、大域体のいわゆる高いランク zetas と非アーベルの L-関数があります。 私たちの目的はこれらの新しい基本的な関係と基本的な構造を求めって, 研究することです。 そして、これは一般的な非可換類体論に関連づけられます。 これに関しては、一般的な相互法則と存在定理を求めるために特別な Galois 表現, 安定性と淡中圏を使います。

４．研究成果
（１）半安定放物的ベクトル束と淡中圏の理論を用いて,Riemann 面の一般非可換類体論を構成した.
（２）半安定ベクトル束のモジュライ空間の点の自然な重み付き数え上げにより, 有限体上の関数体に対する非可換ゼータ関数を導入した.
（３）代数体に対する非可換ゼータ関数を, 半安定格子のモジュライ空間上のある積分により導入した. 加えて, このゼータ関数と Eisenstein 級数の積分に付随する Eisenstein 周期との関係を明らかにした.
（４） Lafforgue の仕事を動機として,格子の安定性と, 跡公式の理論で用いられる Arthur の解析的截頭との本質的な関係を明らかにした.
（５）モジュライ空間の点とカスプに対して定義される, 一般化された Siegel 距離により, 階数２の半安定O_F-格子を幾何学的に特徴付けた.
（６）Eisenstein 級数に関する Langlands-Siegel の仕事, および, 相対跡公式の理論における拡張された Rankin-Selberg & Zagier法を用いて, 簡約群Gと, その極大放物部分群 P の組(G,P)に対して, 一般的な可換ゼータ関数を導入した.加えて, 対応するゼータ関数の Riemann 予想に関して, Weyl 群の対称性を含む対称性の果たす役割を明らかにした;
（７）一般類体論をはじめとする数論の研究に, 安定性の概念を初めて系統的に導入した.
（８）次に挙げるような研究を触発した：J. Lagarias (米・ミシガン大学), 鈴木正俊 (東京大学), 林司 (沖 software)による,SL(2)に付随するゼータ関数の Riemann 予想の証明. Haseo Ki （韓・延世大学）による,SL(3),SL(4),SL(5)に付随するゼータ関数の Riemann 予想の証明, および, 鈴木による SL(3),Sp(4)(の半分),G_2 の場合の証明. 小森靖(名古屋大学,立教大学)による, (G,P)の可換ゼータ関数に予想されていた一般的な関数等式の証明. 大山友昭(九州大学)による, SL(n)に付随するゼータ関数を計算するコンピュータ・プログラムの構築. Ki-小森-鈴木による,(G,P)のゼータ関数の弱 Riemann 予想に関する最近の結果, to mention a few.
（９） D. Zagier (独・Max-Planck 研究所, 仏・コレージュ・ド・フランス)との共同研究により, Weil-Petersson 直線束, および Takhtajan-Zograf 直線束に関する, 穴ありリーマン面のモジュライ空間に付随する Deligne 積に対して, ある一般的関係を明らかにした.
（10）W.-K. To (シンガポール国立大学),小櫃邦夫(鹿児島大学)との共同研究により, Takhtajan-Zograf 距離の, 境界へ退化してゆく際の漸近挙動を得た;
（11） H. Kim (トロント大学)との共同研究により, Arthur の截頭領域の体積を与えた. これを Langlands の Eisenstein 級数に関する結果, および 相対跡公式の理論における Jacquet-Lapid-Rogowski の拡張された Rankin-Selberg 法という解析的な手法を用いて行った. これに基づいて, 半安定格子のモジュライ空間の一般的な表示を得た. この手法は, Harder-Narasimhan による, ベクトル束のモジュライ空間を扱う代数的方法とは本質的に異なる.
（12）われわれの高階ゼータ関数の加法構造を明らかにすることにより, 高階ゼータ関数と(G,P)の可換ゼータ関数を系統的に応用するための,最初の重要な足がかりを与えた.

これらは全て, 現在活発に進められている, 安定性の概念に基づく類体論と非可換ゼータ関数の研究と,Riemann 予想に対して対称性が果たす役割を模索する研究の一部分である.

In terms of mathematics, there are some remarkable advances:

(1) We for the first time offer a general non-abelian class field theory for Riemann surfaces using semi-stable parabolic bundles and Tannakian category theory;
(2)We expose genuine non-abelain zeta functions for function fields over finite fields, by a natural weighted count on points of moduli spaces of semi-stable bundles;
(3)We introduce non-abelain zeta functions for number fields as certain natural integrations over moduli spaces of semi-stable lattices and moreover expose there relation with what we call Eisenstein periods associated to integrations of Eisenstein series;
(4)We expose an intrinsic relation between stability of lattices and Arthur's analytic truncation used in trace formula, motivated by a work of Lafforgue;
(5) We give a geometric characterization of semi-stable O_F-lattices of rank two in terms of what we call generalized Siegel distances between the moduli points and all cusps;
(6)We introduce general abelian zeta functions associated to (G,P), where G reductive groups and P their maximal parabolic subgroups, using Langlands-Siegel's work on Eisenstein series and an advanced Rankin-Selberg methods used in relative trace formula; this then further exposes the role of symmetries, including of that of Weyl, in the corresponding Riemann Hypothesis;
(7) We for the first time systematically use stability to study arithmetic properties, particularly, general class field theory;
(8)Our works have influenced many others: Say the proof of the Riemann Hypothesis for zetas associated to SL(2) by J. Lagarias (Univ. of Michigan), M. Suzuki (Tokyo Univ), T. Hayashi (Oki); the proof of the Riemann Hypothesis for zetas associated to SL(3), SL(4), SL(5) of H. Ki (Yonsei Univ) and to G_2 by Suzuki, the proof of the conjectural functional equation for zetas associated to (G,P) by Y. Komori (Nagoya Univ, now Rikkyo Univ), a computer program to offer zetas associated to SL(n) by OOyama (Kyushu Univ), and a more recent result of Ki, Komori and Suzuki on weak Riemann Hypothesis for zetas associated (G,P), to mention a few.
(9)We together with Zagier (Max-Planck Institute for Mathematics, College de France) offer a general relation for Deligne products associated to moduli spaces of punctured Riemann surfaces among Weil-Petersson line bundles and Takhtajan-Zograf line bundles;
(10)We together with W.-K. To (National Univ of Singapore) and K. Obitsu (Kagoshima Univ), obtain asymptotic behaviors of Takhtajan-Zograf metrics when degenerating to the boundary;
(11) We, together with H. Kim (Toronto Univ), using analytic method, namely, a result of Langlands on Eisenstein series, an advanced Rankin-Selberg method in relative trace formula due to Jacquet-Lapid-Rogowski, obtain volumes of Arthur's truncated domains. Based on this, we also obtain a general formula for moduli spaces of semi-stable lattices. This is totally different from the algebraic method used by Harder-Narasimhan in dealing with moduli spaces of vector bundles;
(12)We have exposed the additive structure of our high rank zeta functions, and hence open an important initial door to find structural applications of our high rank zetas and zetas associated to (G,P).

All these are parts of our active on-going program in which we use stability to study non-abelian zeta functions and class field theory, and expose the role of symmetries played in the Riemann Hypothesis.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）
①L. Weng Zeta function for Sp(2n), Appendix to: The Riemann Hypothesis for Weng's zeta function of Sp(4) over Q, J. of Number theory, 129(2009) 569-579
②M. Suzuki & L. Weng, Zeta functions for

G_2 and their zeros, International Math. Research Notices, 2009(2009) , 241-290
③L. Weng & D. Zagier, Deligne products of line bundles over moduli spaces of curves, Comm. Math Phys, 281(2008), no3, 793-803
④K. Obitsu, W.K. To & L. Weng, The asymptotic behavior of the Takhtajan-Zograf metric, Comm. Math Phys, 284(2008), no1, 227-261
⑤Henry H. Kim, & L. Weng, Volume of truncated fundamental domains, Proceedings of Amer Math Soc, 135, (2007) 1681-1688
⑥Lin Weng, A Rank Two Zeta and its Zeros, J Ramanujan Math. Soc,21(3),(2006) 205-266

〔学会発表〕(計７件)
① Lin Weng, Zeta Functions for (G,P)/Q, Zeta Functions Days in Seoul, Seoul, S.Korea, 2009,09,03
② Lin Weng, Symmetries and the Riemann Hypothesis, Algebraic Geometry and Its New Developments, Math Dept, Kyoto University, 2008,12,21
③ Lin Weng, Stability and Arithmetic, Algebraic Geometry and Its Related Topics, RIMS, Kyoto, 2008,12,11
④ Lin Weng, Symmetries and the Riemann Hypothesis, L Functions in Arithmetic and Geometry, Muenster, Germany, 2008,06,26
⑤ Lin Weng, Stability and Arithmetic, Complex Geometry in Osaka, Osaka, 2007,11
⑥ Lin Weng, General Class Field Theory, Algebraic and Arithmetic Structures of Moduli Spaces, Sapporo, 2007,09
⑦ Lin Weng, General Class Field Theory, Euler 300: Arithmetic Geometry, Euler Institute, St. Petersberg, Russia, 2007,06

〔図書〕(計３件)
①Lin Weng, Iku Nakamura ed, Arithmetic Geometry and Number Theory, World Scientific,2006: pp.29-46 , pp.123-210 , pp. 211-400
②Lin Weng, Masanobu Kaneko ed.Conference on L-functions, World Scientific,2007 : pp. 219-370
③ Iku Nakamura, Lin Weng ed, Algebraic and Arithmetic Structures of Moduli Spaces, Advanced Studies in Pure Mathematics, 58, Math Society of Japan, 2010(to appear): pp. 173-223, pp.225-359

〔その他〕
アジア，ユーロッパ，北アメリカにおよそ２０の研究機構で２０以上の講演をした。

６．研究組織
(1)研究代表者
翁 林 (WENG LIN)
九州大学・大学院数理学研究院・教授
研究者番号：60304002

(2)研究分担者

(3)連携研究者
小林 亮一 (KOBAYASHI RYOICHI)
名古屋大学・多元数理科学研究科・教授
研究者番号：20162034
二木 昭人 (FUTAKI AKITO)
東京工業大学・理工学研究科・教授
研究者番号：90143247
中村 郁 (NAKAMURA IKU)
北海道大学・理学研究科・教授
研究者番号：50022687