

研究種目：基盤研究 (B)
 研究期間：2006～2008
 課題番号：18340014
 研究課題名 (和文) Floer 理論とシンプレクティック幾何学の研究

研究課題名 (英文) Study on Floer theory and symplectic geometry

研究代表者 小野 薫 (Kaoru Ono)
 北海道大学・大学院理学研究院・教授
 研究者番号：20204232

研究成果の概要：Lagrange 部分多様体の Floer 理論の枠組みおよび基礎付けを深谷氏、Oh 氏、太田氏との共同研究で行った。Lagrange 部分多様体の Floer 理論のシンプレクティック幾何学へのいくつかの応用も得た。また、トーリック多様体の Lagrange トーラスファイバーの Floer 理論にも着手し、Hamilton displaceability や displacement energy についての結果を得た。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	4,000,000	1,200,000	5,200,000
2007年度	4,700,000	1,410,000	6,110,000
2008年度	4,000,000	1,200,000	5,200,000
年度			
年度			
総計	12,700,000	3,810,000	16,510,000

研究分野：幾何学

科研費の分科・細目：数学 幾何学

キーワード：symplectic 構造、Floer 理論、Lagrange 部分多様体、擬正則曲線、 A_∞ -構造、変形理論

1. 研究開始当初の背景

Lagrange 部分多様体の Floer 理論は、1980年代中ごろの Andreas Floer 氏により創始され、1990年初頭に Yong-Geun Oh 氏によりその構成が拡張された。Lagrange 部分多様体の交叉の問題や、displacement energy の評価を始め様々な問題への応用も成された。1996年、深谷氏と小野は、一般の symplectic 多様体上の Hamilton 微分同相写像に対する Floer homology の構成と Gromov-Witten 不変量の構成に成功した。その手法を Lagrange 部分多様体の Floer 理論の研究に用いることを Oh 氏、太田氏とともに進めた。この研究は、深谷氏により提唱されていた深谷圏の構成の基盤を与えるものでもある。一般の Lagrange 部分多様体

に対して Floer (co)homology が定義されないであろうことは当時から専門家の間では認識されていたが、これを filtered A_∞ -代数の変形理論の枠組み (Maurer-Cartan 方程式の解) で定式化したのは本研究計画開始以前の我々の成果である。さらに、必要な moduli 空間の向き付け及び横断性や chain level の交叉理論の実現も行っており、理論は大方出来上がっていた。

我々の理論は大掛かりなものであったが、具体例の計算などは (部分的なものを除いて) あまりなく、良いクラスの例での計算をし、それに伴う応用を見つけることを望んでいた。

2. 研究の目的

Symplectic 幾何学の中でも擬正則曲線の理論と Floer 理論の研究を深め、その symplectic 幾何学 (特に symplectic topology に属する諸問題) への応用をすることが本研究の目的であった。その中でも、Lagrange 部分多様体の Floer 理論の基盤を細部にわたって整備し、それを公表すべく本の原稿としてまとめること。また、その応用を模索することは中心的課題であった。以前より太田氏と行ってきた複素曲面の孤立特異点のリンクの symplectic 充填に関する研究を進めることも目的の一つであった。

3. 研究の方法

理論系の研究なので、各人がそれぞれの研究テーマについて研究を進め、必要に応じて意見交換することで研究を進めた。共同研究を進めるに当たっては、それぞれの考えを電子メールで伝えあったり、必要に応じて、直接会う機会を持ち集中的に討議したり、電話での議論を行うなどして研究を進めた。関連する最新の研究情報を得るに当たっては、国内外の研究集会に出席することが有意義であった。その一方、参加した多くの研究集会では研究成果の発表を行い、他の専門家のコメントをもらうなどした。更には、研究協力者の深谷氏、太田氏と共に、国外からの研究者を招聘した連続講演会を何度か開き、最新の研究動向を吸収するようにした。具体的な研究内容に関する方法は、Floer 理論及び擬正則曲線の理論が中心で、必要に応じて、位相幾何学、微分幾何学、大域解析学、可換環論などの代数学の諸理論を援用した。その際には、専門家の意見も参考にすることが多かった。

4. 研究成果

(A) 境界のないコンパクトな symplectic 多様体の中の埋め込まれた Lagrange 部分多様体 L が相対スピン構造を持つとする。(この概念は Fukaya-Oh-Ohta-Ono により以下の文献の中の[その他]に挙げた book manuscript の中で導入されたものである。) L 上に境界を持つ正則円盤のモジュライ空間の stable map コンパクト化を系統だっで用いることで、filtered A_∞ -代数を構成した。得られる代数は様々な補助的データによるので一意的に定まるという訳ではないが、filtered A_∞ -代数のホモトピー同値を除いて一意的に定まる。更に、filtered A_∞ -代数の「古典的コホモロジー」上に filtered A_∞ -代数の構造を誘導することができ、これは L から同型を除いて一意的に定まる。こうしたことを示すためには、チェーンレベルの交叉理論

を作ることで、倉西構造の理論を用いて境界付き種数 0 の stable map のモジュライ空間の仮想基本チェーンの構成をすること、それらに一斉に consistent な向きを入れ、それを用いて定義されるチェーンレベルの多重線形写像が符号付きで filtered A_∞ -関係式を満たすことを示すことと共に、filtered A_∞ -代数に関すること、特に filtered A_∞ -代数のホモトピー代数 (射の定義、射がホモトピー同値であることの定義、filtered A_∞ -構造や射を作るための障害理論、Whitehead 型定理、標準モデルの構成など) も自前で作る必要であった。filtered A_∞ -代数の言葉を用いると、 L とそれ自身の Floer

complex を m_1 を境界作用素として定義するには、 $m_0(1)$ が消えているか或いは unit の倍元となっていればよい。より一般には、filtered A_∞ -代数の元 b を用いて filtered A_∞ -代数の変形をしたのち、 m_1^b が境界作用素となり得るかどうかを考察する。 $m_0^b(1)$ が消えていることは b が filtered A_∞ -代数での Maurer-Cartan 方程式の解となること、 $m_0^b(1)$ が unit の倍元となることは、Maurer-Cartan 方程式の弱い意味での解となることと定式化される。後者の場合、何倍になるかの係数を b に対応させることで potential 関数が定義される。

横断的に交わる (あるいは clean intersection である) Lagrange 部分多様体の相対スピン対 (L_0, L_1) に対して、Floer complex を定義するには、 L_0 と L_1 それぞれが Maurer-Cartan 方程式の解 b_0, b_1 を持てば、 (L_0, b_0) と (L_1, b_1) の Floer complex が得られる。また、弱い意味での Maurer-Cartan 方程式の解 b_0, b_1 の場合には potential 関数の値が一致していれば、同様である。

(L, b) とそれ自身の Floer cohomology を計算する手段として、 L の古典的コホモロジーと Novikov ring の tensor 積を E_2 -項とし、Floer cohomology を E_∞ -項とする spectral sequence を構成した。このことにより、例えば Maslov class が消えている Lagrange 部分多様体の場合には、Floer cohomology が非自明となることなどが応用として得られる。この事実を用いることで、Lagrange 部分多様体の空間を Hamilton 変形によって移りあう m のを同一視して得られる空間が Hausdorff になるかという flux 予想の類似物 (これは一般には成立しない) に部分的に肯定的な解答が得られる。(Thomas-Yau による Hamilton 変形類の中での special Lagrange 部分多様体の一意性にも用いられていた。)

(B) 以上は一般論であるが、toric 多様体の運動量写像のファイバー(Lagrange トラスにある)に対して適用すると、すべての

Lagrange トーラスファイバーは Maurer-Cartan 方程式の弱い意味での解を持ち、その解空間は L の 1 次元コホモロジー (の Novikov ring の次数 0 部分との tensor 積) を含むことが分かる。potential 関数のある意味での主要部は運動量写像の像として現れる凸多面体だけで記述される。Floer cohomology が消えないための条件は、potential 関数の臨界点である

Maurer-Cartan 方程式の弱い意味の解 b に対応することが分かる。この考察を進めることで、任意のコンパクト toric 多様体は、Hamilton 変形で displace できない Lagrange トーラスファイバーを含むことが分かった。(これは Entov-Polterovich, Cho, Cho-Oh の結果の改良である) また、toric 多様体の Batyrev による量子コホモロジー環の類似物 (Fano toric 多様体の時は量子コホモロジーと同型になる) と potential 関数の主要部の Jacobian ring とが同型となる。このことを用いて、然るべき非退化性の仮定のもとに、Floer cohomology が消えない (L, b) の個数は toric 多様体の Betti 数の和となることなども分かった。

(C) symplectic 微分同相写像群の中で Hamilton 微分同相写像群が C^1 -位相に関して閉じていること (flux 予想の解決) を纏めた論文、family 版の Gromov-Witten 不変量を構成した論文などが出版に至った。

(D) 1999 年に出版された論文で、複素曲面の孤立特異点の特別なクラスに対しては、そのリンクの symplectic 充填の位相に制約があることを示した (さらに 2002-2005 に出版された論文極小 symplectic 充填の分類も得た) が、そこからはみ出したクラスについて以下の結果を得た。(1) 極小 symplectic 充填を無限個持つような孤立特異点のクラスを見つけた。(2) $(2, 3, 7)$ 型 Brieskorn 特異点など $K3$ 超曲面特異点と名付けたクラスの特異点のリンクの symplectic 充填の符号数と Euler 数の間に成立する不等式を示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 15 件)

*以下 論文はすべて査読有り

1. K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Canonical models of filtered A_∞ -algebras and Morse complexes, Proceedings of Yashafest, CRM Proceedings and Lecture Notes, In Press.
2. H. Ohta and K. Ono, An inequality for symplectic fillings of the link of a hypersurface $K3$ singularity, Banach Center Publications 85 (Postnikov Memorial Conference Volume), 93-100,

2009.

3. K. Ono, A question analogous to the flux conjecture concerning Lagrangian submanifolds, Proc. Gokova Geom.-Top. Conf. 2007., 1-14, 2008.
4. H.-V. Le and K. Ono, Parameterized Gromov-Witten invariants and topology of symplectomorphism groups, Group of Diffeomorphisms, Adv. Stud. Pure Math. 52, 51-75, 2008.
5. H. Ohta and K. Ono, Examples of isolated surface singularities whose links have infinitely many symplectic fillings, Arnold Festschrift Volume, J. Fixed Point Theory and Appl., 3, 51-56, 2008.
6. K. Yamaguchi, Geometry of linear differential systems towards contact geometry of second order, IMA Vol. Math. Appl. 144, 151-203, 2008.
7. S. Izumiya and M. Takahashi, Caustics and wave front propagations: applications to differential geometry, Banach Center Publ. 82, 125-142, 2008.
8. T. Fusho and S. Izumiya, Lightlike surfaces of spacelike curves in de Sitter 3-space, J. Geom. 88, 19-29, 2008.
9. A. A. Davydov, G. Ishikawa, S. Izumiya and W.-Z. Sun, Generic singularities of implicit systems of first order differential equations on the plane, Jpn. J. Math. 3 93-119, 2008.
10. G. Ishikawa, Global classification of curves on the symplectic plane, Real and complex singularities, Contemp. Math. 459, 51-72, 2008.
11. M. Jinzenji, Virtual structure constants as intersection numbers of moduli space of polynomial maps with two marked points, Lett. Math. Phys. 86, 99-114, 2008.
12. D. Matsushita, On nef reductions of projective irreducible symplectic manifolds, Math. Z. 258, 267-270, 2008.
13. B. Forbes and M. Jinzenji, On equivariant mirror symmetry for local P^2 , Commun. Number Theory Phys. 1, 729-760, 2007.
14. K. Ono, Development in Symplectic Floer theory, Proc. ICM, Madrid, 2006, Vol. II, 1061-1082.
15. K. Ono, Floer-Novikov cohomology and the flux conjecture, Geom. Funct. Anal., 16, 981-1020, 2006.

[学会発表] (計 14 件)

1. K. Ono, Floer theory for Lagrangian submanifolds, the 46th Cornell Topology

Festival, Cornell University, May 2-5, 2008.

2. K. Ono, Floer-Novikov cohomology and symplectic fixed points, Floer theory and symplectic dynamics, CRM, Univ. Montreal, May 19-24, 2008.

3. K. Ono, Floer theory for Lagrangian submanifolds (three lectures), Symplectic Geometry, Morningside Center of Math., Chinese Academy of Sciences, July 21-25, 2008.

4. K. Ono, An analogous question to the flux conjecture for Lagrangian submanifolds, Holomorphic Curves: algebraic structures and geometric applications, Stanford University, August 18-19, 2008.

5. K. Ono, Floer theory for Lagrangian submanifolds and an analog of the flux conjecture for Lagrangian submanifolds, Gokova Geometry-Topology Conference, Gokova, Turkey, May28-June2, 2007.

6. K. Ono, Floer-Novikov cohomology and symplectic fixed points, Postnikov Memorial Conference, Algebraic Topology; Old and New, Bedlewo Conference Center, Poland, June 18-24, 2007.

7. Y.-G. Oh and K. Ono, Floer theory for Lagrangian submanifolds, Yashafest, New Challenges in Symplectic Field Theory, June 25-29, 2007.

8. K. Ono, Floer-Novikov cohomology and symplectic fixed points, AMS-IMS-SIAM Joint Summer Institute "Symplectic topology and measure preserving dynamical systems", Snowbird, Utah, July 1-5, 2007.

9. K. Ono, An analogous question to the flux conjecture for Lagrangian submanifolds, Symplectic Geometry, ETH Zurich, September 3-7, 2007.

10. K. Fukaya, H. Ohta and K. Ono (one lecture each), Lectures on algebraic aspects on filtered A_∞ -algebras, AIM workshop: Toward relative symplectic field theory, Graduate Center, CUNY, NY, September 24-28, 2007.

11. K. Ono, Floer-Novikov cohomology and its applications, Pacific Rim Complex Geometry Conference, Huang-Shan, China, August 1-7, 2006.

12. K. Ono, Development in symplectic Floer theory, Topology Session, ICM, Madrid, August 22-30, 2006.

13. K. Ono, Floer-Novikov cohomology and its applications,, Group of Diffeomorphisms, Univ. Tokyo, September 11-15, 2006.

14. K. Ono, Floer theory for Lagrangian submanifolds, MSJ-IHES Symposium: Noncommutativity, Bur-sur-Yvette, France, November 15-18, 2006.

[その他]

K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Lagrangian intersection Floer theory -obstruction and anomaly-, book manuscript (~1000 pages)

K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds, I, arXiv:0802.1703, II:bulk deformation, arXiv:0810.5774.

6. 研究組織

(1) 研究代表者 小野 薫 (KAORU ONO)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：20204232

(2) 研究分担者

山口佳三 (KEIZO YAMAGUCHI)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：00113639

泉屋周一 (SHYUICHI IZUMIYA)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：80127422

石川剛郎 (GOO ISHIKAWA)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：50176161

秦泉寺雅夫 (MASAO JINZENJI)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号：20322795

松下大介 (DAISUKE MATSUSHITA)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号：0333591

(3) 連携研究者

深谷賢治 (KENJI FUKAYA)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：30165261

太田啓史 (HIROSHI OHTA)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・教授
研究者番号：50223839