

研究種目：基盤研究 (B)  
 研究期間：2006～2008  
 課題番号：18340019  
 研究課題名 (和文) ワイエルストラス型表現公式の一般化と特異点をもつ曲面の理論への応用  
 研究課題名 (英文) Generalizations of Weierstrass-type representation formula and their applications to theory of surface with singularities  
 研究代表者  
 山田光太郎 (YAMADA KOTARO)  
 九州大学・大学院数理学研究院・教授  
 研究者番号：10221657

研究成果の概要 (和文)：自然な仮定のもとで特異点をもつ曲面のクラスの性質を、ワイエルストラス型表現公式を用いてしらべた。とくに、3次元双曲空間の平坦フロントの大域的な挙動、3次元ミンコフスキー空間の極大曲面および3次元ド・ジッター曲面の平均曲率1の曲面の特異点の挙動を解析した。また、特異点の微分幾何学として、とくにフロント (波面) の特異点に特異曲率を定義し、ガウス・ボンネ型の定理を得るとともに、フロントの内的な定式化を行った。

研究成果の概要 (英文)：Properties of certain classes of surfaces with singularities are investigated with Weierstrass-type representation formula. For example, global behavior of flat fronts, and behavior of singularities of maximal surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space and mean curvature one surfaces in de Sitter 3-space are investigated.

On the other hand, as a general theory of differential geometry of singularities, a notion of singular curvature of the singular points of wave fronts is defined, and Gauss-Bonnet type formulas are obtained.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	2,500,000	750,000	3,250,000
2007年度	2,400,000	720,000	3,120,000
2008年度	2,400,000	720,000	3,120,000
年度			
年度			
総計	7,300,000	2,190,000	9,490,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：微分幾何・ワイエルストラス表現・フロント・特異点

#### 1. 研究開始当初の背景

部分多様体の微分幾何学においては、多様体に滑らかにほめ込まれた多様体の性質が調

べられている。しかし、一方では、自然な状況で特異点をもつような曲面や超曲面の例も古くからよく知られていた。これらのうちワイエルストラス型の表現公式により複素

解析的なデータであらわされるような曲面，とくに3次元双曲空間の平坦曲面や3次元ミンコフスキー空間の極大曲面に関して，代表者・分担者らはよいクラスを設定し，特異点を許す曲面の大域的性質の研究を開始していた。

## 2. 研究の目的

3次元ユークリッド空間の極小曲面が，リーマン面上の複素解析的なデータにイエルによって具体的に表現できることは「ワストラス表現公式」としてよく知られている。また，いくつかの幾何学的対象について，これと類似な表現公式が存在することがすでに知られている。これらの表現公式は，曲面のはめこみを具体的にあたえているが，「はめこみ」であることはオープンな条件であるから，もとのデータの取りかたによっては，写像の階数が落ちるような点，すなわち特異点が生じる場合がある。このような場合でも適当な枠組を設定すれば，はめこみの場合と同様に幾何学的な考察ができる場合があることがわかってきた。本研究では，これら，ワイエルストラス型公式群に統一的な理解をあたえ，さらに表現公式の応用として，特異点をもつ曲面のクラスの幾何学を研究し，このような微分幾何学がゆたかな研究対象であることを示したい。

とくに，研究対象として，3次元双曲空間の平坦曲面と平坦フロント，3次元ミンコフスキー空間の極大曲面および特異点を許す対象としての極大面，3次元ド・ジッター時空の平均曲率1の曲面 (CMC-1 surfaces) および特異点を許す対象としての CMC-1 faces を考察する。

一方，特異点をもつ対象としてフロント（波面）を考察し，その微分幾何学の一般理論を構築し，具体的な対象への応用を考察する。

## 2. 研究の方法

具体的な対象については，(1) ワイエルストラス型表現公式を用いた，特異点を許す曲面論の構築，(2) いままでの研究を踏まえた，曲面の分類問題の研究を主に行う。とくに3次元双曲空間の平坦波面：大域的な考察を行うためには「完備性」に相当する概念が必要である。一般に「完備」性とは，特異点集合がコンパクトになる曲面に対する概念であるが，「エンド」まで特異点が延びているような曲面については，いまだ理論の枠組が不確定である。そこで，このような曲面に対しても然るべき「完備性」を定義し，理論の枠組を作る。さらに，完備でない「エンド」すなわち，特異点が集積するようなエンドでの曲面の漸近挙動を考察する。

類似の対象：3次元ミンコフスキー空間の極大曲面やド・ジッター空間の CMC-1 曲面の大域的考察を行う。とくに，ド・ジッター空間の CMC-1 曲面の場合，完備でないエンドは非常に複雑な挙動を示す可能性がある。これについて考察する。

本研究のバックグラウンドは，時間的・空間的に多岐にわたる。したがって，研究遂行に際しては，代表者・分担者・連携研究者は分担して関連する研究者との討論・研究連絡を行い，アイディアの具体化および先行結果や古典的な結果に関する情報収集につとめる。

## 4. 研究成果

- (1) 3次元双曲空間の平坦フロントの焦点，すなわち主曲率中心の軌跡もまた平坦フロントになることを示した (分担者國分，分担者・梅原，Rossman と代表者)。もとの平坦フロントが完備であってもその焦点は完備とはかぎらず，エンドに特異点が集積する可能性がある。このような場合の大域的理論を構築するための基礎理論を得た。さらに，平坦フロントは向き付け可能であることを示した。
- (2) 3次元ミンコフスキー空間の極大面に対して成立するワイエルストラス型表現公式に適合した一般化として「極大面 maxface」の概念を導入し，大域的な理論を構築した (分担者・梅原および代表者)。とくに完備な極大面に対して Osserman 型の不等式およびその等号条件を得た。このことは，完備極大面のクラスが，ユークリッド空間の極小曲面と同様に大域的に良い性質をもつ対象であることを示している。
- (3) 3次元ミンコフスキー空間の極大曲面および3次元ド・ジッター時空の CMC-1 曲面を，ワイエルストラス表現公式に適合した形で一般化した特異点をもつ曲面のクラス (極大面 maxface, CMC-1 面 CMC-1 face) に現れる特異点を調べ，ジェネリックな特異点は cuspidal edge, swallowtail, cuspidal cross cap の3種類であることを示した (連携研究者・藤森，佐治，分担者・梅原，代表者)。このことを示すために，cuspidal cross cap の一般的な判定条件を見出した (cuspidal edge, swallowtail の判定条件は，すでに代表者・分担者らによって得られていた)
- (4) 3次元リーマン多様体内のフロント（波面）のジェネリックな特異点は cuspidal edge と swallowtail であることが知られているが，この cuspidal

edge 上に「特異曲率」とよぶ曲率関数を定義し、その性質を調べた（佐治, 分担者・梅原, 代表者）. 微分位相幾何学的な立場ではすべての cuspidal edge は区別できないが、我々の特異曲率は、それらを微分幾何学的に（曲率によって）区別しよう、というものである. 実際、特異曲率と曲面のガウス曲率（外的曲率）との次の関係が得られた：特異点の近傍でガウス曲率が非負の値をとるならば、特異曲率は非正の値をとる. さらに、特異曲率を用いて、フロントに対するガウス・ボンネの公式を得た.

- (5) フロントは特異点をもつ超曲面であるが、その内的な性質を取り出して抽象化した連接接束 coherent tangent bundles の概念を導入し、それに対してガウス・ボンネの公式が成立することを示した（佐治, 分担者・梅原, 代表者）.
- (6) 超幾何微分方程式の解から定まる主ワルツ写像は、球面から3点を除いたリーマン面の普遍被覆からリーマン球面への共形写像とみなせるが、それを双曲的ガウス写像にもつような双曲空間の平坦フロントをつくることができる. これを超幾何微分方程式の双曲的シュワルツ写像とよび、その性質を調べた（佐々木, 吉田, 野呂, 代表者）. この写像は超幾何微分方程式のモノドロミーを双曲空間の等長変換群の部分群として実現するレシピを与えており、モノドロミーの可視化の一つの方法と考えることができる. さらに、双曲的シュワルツ写像の特異点を詳しく解析し、ジェネリックでない特異点が現れるための具体的な状況（超幾何微分方程式のパラメータの値）を厳密に求め、代表者たち（國分, Rossmann, 佐治, 梅原および代表者）の判定条件が有用であることを示した.

## 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計8件）

- ① K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, The geometry of fronts, *Annals of Mathematics*, vol. 169, 491-529, 2009, 査読あり
- ② K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Behavior of corank one singular points on wave front, *Kyushu Journal of Mathematics*, vol. 62 (1), 259-280, 査読

あり

- ③ T. Sasaki, K. Yamada and M. Yoshida, Hyperbolic Schwarz map for the hypergeometric differential equation, *Experimental Mathematics*, vol. 17, 269—282, 2008, 査読あり
- ④ T. Sasaki, K. Yamada and M. Yoshida, Derived Schwarz map of the hypergeometric differential equation and a parallel family of flat fronts, *International Journal of Mathematics*, vol. 19, 847-863, 2008, 査読あり
- ⑤ M. Noro, T. Sasaki, K. Yamada and M. Yoshida, Confluence of swallowtail singularities of the hyperbolic Schwarz map defined by the hypergeometric differential equation, *Experimental Mathematics*, vol. 17, 191-204, 2008, 査読あり
- ⑥ S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, Singularities of maximal surfaces, *Mathematische Zeitschrift*, vol. 259, 1827-848, 2008, 査読あり
- ⑦ M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, Flat fronts in hyperbolic 3-space and their caustics, *Journal of Mathematical Society of Japan*, vol. 59 (1), 265-299, 2007, 査読あり
- ⑧ M. Umehara and K. Yamada, Maximal surfaces with singularities in Minkowski space, *Hokkaido Mathematical Journal*, vol. 35 (1), 13-40, 2006, 査読あり

〔学会発表〕（計8件）

- ① K. Yamada, Asymptotic behavior of flat surfaces in hyperbolic 3-space, June 6, 2008, Universidad de Granada, Spain.
- ② K. Yamada, Spacelike mean curvature one surface in de Sitter 3-space, October 11, 2007, Geometry Seminar, Northeastern University, Shenyang, China.
- ③ 山田光太郎, Spacelike mean curvature one surfaces in de Sitter 3-space, 2007年7月11日, 「部分多様体論と可積分系および幾何解析とのつながり」, 京都大学数理解析研究所.
- ④ K. Yamada, Spacelike mean curvature one surfaces in de Sitter 3-space, May 10, 2007, Universidad de Granada.
- ⑤ K. Yamada, Spacelike mean curvature 1 surfaces in de Sitter 3-space, May 2, 2007, “Progress in Surface Theory”, Mathematische Forschungsinstitut Oberwolfach, Germany.

- ⑥ 山田光太郎, Global properties of flat fronts in hyperbolic 3-space, 特異点論セミナー, 2006年11月17日, 北海道大学.
- ⑦ 山田光太郎, Flat fronts in hyperbolic 3-space, 北海道大学集中講義オーバービュー, 2006年11月13日, 北海道大学.
- ⑧ 山田光太郎, Flat fronts in hyperbolic 3-space---behavior of ends, 幾何学阿蘇研究集会, 2006年9月12日, 休暇村南阿蘇.

[その他]

ホームページ等

<http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

山田 光太郎 (YAMADA KOTARO )  
 東京工業大学・大学院理工学研究科・教授  
 (2009年9月30日まで  
 九州大学・大学院数理学研究院・教授)  
 研究者番号: 10221657

### (2) 研究分担者

宮岡 礼子 (MIYAOKA REIKO) 2007年度まで  
 東北大学・大学院理学研究科・教授  
 (2007年8月まで  
 九州大学・大学院数理学研究院・教授)  
 研究者番号: 90274430

佐伯 修 (SAEKI OSAMU) 2007年度まで  
 九州大学・大学院数理学研究院・教授  
 研究者番号: 30201510

大津 幸男 (OTSU YUKIO) 2007年度まで  
 九州大学・大学院数理学研究院・准教授  
 研究者番号: 80236075

長友 康行 (NAGATOMO YASUYUKI) 2007年度まで  
 九州大学・大学院数理学研究院・准教授  
 研究者番号: 10266075

高山 晴子 (TAKAYAMA HARUKO) 2007年度まで  
 九州大学・大学院数理学研究院・助教  
 研究者番号: 90274430

梅原 雅顕 (UMEHARA MASAOKI) 2007年度まで  
 大阪大学・大学院理学研究科・教授  
 研究者番号: 90193945

黒瀬 俊 (KUROSE TAKASHI) 2007年度まで  
 福岡大学・理学部・教授  
 研究者番号: 30215017

國分 雅敏 (KOKUBU MASATOSHI) 2007年度まで  
 東京電機大学・工学部・准教授  
 研究者番号: 50287439

### (3) 連携研究者

宮岡 礼子 (MIYAOKA REIKO) 2008年度  
 東北大学・大学院理学研究科・教授  
 研究者番号: 90274430

佐伯 修 (SAEKI OSAMU) 2008年度  
 九州大学・大学院数理学研究院・教授  
 研究者番号: 30201510

大津 幸男 (OTSU YUKIO) 2008年度  
 九州大学・大学院数理学研究院・准教授  
 研究者番号: 80236075

長友 康行 (NAGATOMO YASUYUKI) 2008年度  
 九州大学・大学院数理学研究院・准教授  
 研究者番号: 10266075

高山 晴子 (TAKAYAMA HARUKO) 2008年度  
 九州大学・大学院数理学研究院・助教  
 研究者番号: 90274430

梅原 雅顕 (UMEHARA MASAOKI) 2008年度  
 大阪大学・大学院理学研究科・教授  
 研究者番号: 90193945

黒瀬 俊 (KUROSE TAKASHI) 2008年度  
 福岡大学・理学部・教授  
 研究者番号: 30215017

國分 雅敏 (KOKUBU MASATOSHI) 2008年度  
 東京電機大学・工学部・准教授  
 研究者番号: 50287439

藤森 祥一 (FUJIMORI SHOICHI) 2008年度  
 福岡教育大学・教育学部・准教授  
 研究者番号: 00452706

庄田 敏宏 (SHODA TOSHIHIRO) 2008年度  
 佐賀大学・文化教育学部・准教授  
 研究者番号: 10432957

高橋 正郎 (TAKAHASHI MASARU) 2008年度  
 久留米工業高等専門学校・准教授  
 研究者番号: 70311107