

平成 21 年 4 月 15 日現在

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2006～2008

課題番号：18340027

研究課題名（和文） 複雑な系における確率過程論と実解析学の展開

研究課題名（英文） Developments of the theory of stochastic processes and real analysis on disordered media

研究代表者

熊谷 隆 (KUMAGAI TAKASHI)

京都大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：90234509

研究成果の概要： フラクタルやランダム媒質を典型例とした複雑な系の上で、熱がどのように伝導するかといった物理現象を解明するため、系の上の確率過程や対応する自己共役作用素の解析を行った。確率過程論と実解析学の手法を融合させる事により、汎用性の高い解析の方法を確立し、いくつかのモデルについて熱核の詳しい評価を与えた。また、シェルピンスキーカーペット上のブラウン運動の一意性という当該分野の 20 年に渡る未解決問題を、肯定的に解決する事に成功した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	4,600,000	1,380,000	5,980,000
2007 年度	3,100,000	930,000	4,030,000
2008 年度	3,800,000	1,140,000	4,940,000
年度			
年度			
総計	11,500,000	3,450,000	14,950,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：確率論、解析学、応用数学、数理物理、フラクタル、熱核、飛躍型確率過程

1. 研究開始当初の背景

80年代後半以降精力的に研究されてきたフラクタル上の確率過程論・解析学の研究により、フラクタル図形において確率過程・ラプラス作用素を用いた熱伝導や波動伝播等の物理現象の解明が有用であることが明確になってきた。さらに近年の我々の研究で、これらの方法が"理想的な"形状のフラクタルに限らず、何らかの意味で自己相似性に近い構造を持つ図形の上でも有効であること

が次第に分かってきた。

この流れを受けて我々は、滑らかでない領域や統計的自己相似性を持つ確率モデルも含む、より一般の複雑な系の上で、確率過程論を解析学の諸分野との有機的な関わりの中で発展させることを大きな動機付けとして本研究を開始した。複雑な系で統合的な手法による解析学を展開することにより、古典系へのフィードバックを与えることも本研究の狙いの一つである。

2. 研究の目的

本研究の目的は、複雑な系の上で確率過程論や実解析学を統合的かつ有機的に展開することである。具体的には、以下の目標に向かったアプローチを行った。

(1) 複雑な系の上の対称拡散過程と、対応する関数空間の解析

1 放物型ハルナック不等式の同値条件の改良、境界ハルナック不等式の安定性の問題

2 複雑な系の上のスペクトルの解析、移送不等式の解析

3 複雑な系の上のトレース理論の展開とその応用

(2) 複雑な系の上の対称飛躍型確率過程と、対応する関数空間の解析

1 対称飛躍型確率過程の熱核評価およびハルナック不等式

2 対称飛躍型確率過程のハルナック不等式の安定性の問題

(3) 確率モデルの大域的挙動の解析

1 非有界なランダムコンダクタンスに対応するマルコフ連鎖のホモジナイゼーションの問題

2 ランダム媒質中のランダムウォークの長時間挙動の解析

(4) 複雑な系の上の確率解析の基礎付け

1 複雑な系上の確率微分方程式の解析と support 定理への応用

3. 研究の方法

(1) 当該分野と深く関わるテーマについて造詣が深い7名の海外共同研究者(Barlow教授、Bass教授、Z. Q. Chen教授、Grigor'yan教授、Saloff-Coste教授、Sturm教授、Hambly講師)を迎え、本研究費の支援で開催した研究集会に招聘するなどして最新情報の提供を受けるとともに、様々な共同研究を推し進めた。海外主力研究者との広範なネットワークを生かした共同研究は、本研究の大きな特徴である。

(2) 研究目的の(1)-(4)に合わせて分担者を以下のグループに分け、熊谷が中心となってセミナー、研究集会などで研究交流を行った。普段は電子メール等で研究連絡を取り合い、各々の専門を生かした形で複雑な系の解析を多面的・有機的に推し進めた。

(Group 1) 熊谷、木上、相川、竹田、日野、Barlow、Bass、Grigor'yan、Saloff-Coste、Sturm、Hambly

(Group 2) 熊谷、竹田、日野、Barlow、Bass、Chen、Grigor'yan

(Group 3) 熊谷、高橋、舟木、小谷、Barlow、Bass、Hambly

(Group 4) 熊谷、重川、日野、Sturm、Hambly

(3) 研究期間中にいくつもの研究集会を行い、初年度と最終年度には大規模な国際研究集会も開催した。これにより、当該研究の最新情報を取り入れることが可能になり、さらに当該研究を高い観点から総合的、統合的に推進することが可能となった。

4. 研究成果

(1) 総括： 分担者・連携研究者・海外共同研究者との連携により、複雑度の高い系に関する解析学を確率過程論や解析学の諸分野との有機的な関わりの中で統合的に発展させるという目的を、ある程度達成した。フラクタル上の解析学に関する長年の未解決問題を肯定的に解決した研究を始め、当該分野の研究を大きく推進するだけでなく、Harnack 不等式や熱核に関する評価は、ユークリッド空間上に限定しても新しい結果・手法を与えている。本研究の成果の多くは国際的に評価の高い雑誌に掲載され、代表者・分担者・連携研究者が国内外の多くの研究集会に招待された。これらの事実からも、本研究の成果が国際的に高い評価を得たことを客観的に裏付けることができる。本研究を遂行する中で、複雑な系の解析学と、系の持つ幾何学的性質の関係の重要性があらためて認識された。今後の展望として、より幅広い見地から、複雑な系の上の確率過程論とその幾何学的応用の研究を推進することにより、複雑度の高い空間上の数学理論を一つの大きな流れとして展開することができると考える。以下、代表者、分担者、連携研究者それぞれの主な研究成果を具体的に記す。

(2) 熊谷 隆

1 Sierpinski carpet上に、局所的な折り返しや平行移動で不変な拡散過程は(定数倍の時間変更を除いて)ただ一つに定まる事を証明した。これは、carpet上のブラウン運動の一意性の問題として知られる当該分野の主要な未解決問題であった。(Barlow氏、Bass氏、Teplyaev氏との共同研究)

2 次元の高い正方格子上で、臨界確率における向きのついた散開パーコレーションクラスターを考え、そのincipient infinite cluster上のランダムウォークの熱核に関する詳しい評価を得た。証明では、一般のグラフ上で有効抵抗と体積増大度の情報から熱核の評価を導き出す解析的な評価と、このモデルで有効抵抗などの評価を行う確率論的評価の両者をうまく融合させている。(Barlow氏、Jarai氏、Slade氏との共同研究)

3 ランダムな図形の上のマルコフ過程が強い再帰性を持つ場合に、熱核評価を得るための幾何学的な十分条件を得た。さらにこの応

用として、長距離パーコレーション上のランダムウォークについて、ロングレンジの影響が弱い場合に熱核評価を得た。(三角淳氏との共同研究)

4 D次元正方格子上の飛躍型確率過程が放物型ハルナック不等式を満たすための必要十分条件、および安定過程型の熱核評価を持つための必要十分条件について、研究を行った。これらの性質について、摂動で安定な同値条件を導きだした。(Barlow氏、Bass氏との共同研究)

5 測度付き距離空間上の正則ディリクレ形式について、Nash不等式の仮定の下、安定過程型の上からの熱核評価を持つための必要十分条件について研究を行った。その結果、対応する確率過程やレヴィ密度関数を用いた同値条件を得ることができた。(Barlow氏、Grigor'yan氏との共同研究)

6 Stable-like processから飛躍の大きさが大きい部分を取り除いた、finite range jump processの熱核の詳しい評価を得た。この結果を用いると、飛躍の大きさが大きい部分について非常に緩やかな可積分条件の下で、熱方程式の解のヘルダー連続性を得ることができる。(Chen氏、Kim氏との共同研究)

(3)相川弘明

1 John領域に対するCarleson評価をDomarの方法を用いて確立し、位相境界点における極小Martin点が高々2個となるJohn定数の条件を与えた。さらに凸集合の和で書ける領域のMartin境界が位相境界と同相になるsharpな十分条件を与えた。

2 任意の領域において大域的な境界Harnack原理が成立することと、大域的なCarleson評価が成立することが同値であることを示した。

3 John領域において調和測度が強ダブリングであることと、領域が準一様であることが同値であることを示した。

(4)木上淳

Resistance formから導かれる熱核の評価について次のような研究を行った。

1 Resistance formにおいて一般の閉集合が境界となり得るための必要十分条件を明らかにし、そのような境界に対応するGreen関数のresistanceによる具体的な表示を行った。また、適当な測度の下で、対応する確率過程が常に連続なtransition densityを持つことを明らかにした。

2 Resistance formに対して、annulus comparable conditionという条件を導入し、この条件が、一点とそれを中心とする球の外部のresistanceが球の半径と比較可能であるための必要十分条件であることを示した。

3 1, 2の結果を用いて、1で得られた連続なtransition densityの対角成分がよい評価を持つための必要十分条件は、測度がresistance metricに関してvolume doublingであることを示した。

(5)重川一郎

確率解析の手法を使って、多様体上の拡散過程や、Wiener空間や格子スピン系のGibbs測度の下での作用素のスペクトルギャップの存在性などの研究を行った。

無限次元的な問題として、Wiener空間上のSchrödinger作用素を考察し、ポテンシャルの可積分性の条件でスペクトルギャップの存在を示した。また格子スピン系に対しても、Hodge-Kodaira作用素に対し、高次元の調和形式が存在しないことを示した。最近では、リーマン多様体上の非対称な拡散過程を考察し、基本解の収束の速さが、対称な場合がもっとも遅いことが分かった。

(6)日野正訓

フラクタル上の対称拡散過程に関する研究を行った。多くの自己相似フラクタルについて、付随するDirichlet形式から定まるエネルギー測度が自己相似測度と互いに特異であることを証明した(中原健治氏との共同研究)。この証明方法を利用し、拡散過程のマルチンゲール次元が1であることを示した。更にこの事実の応用例として、フラクタル上の良い関数について、適切な参照関数とのマイクロスケールでの変動比により、関数の「1階微分」の概念が自然に定義できることを示した。

(7)舟木直久

ノイズを適当に構成することにより、Lévy過程の分布を不変測度に持つような確率偏微分方程式の導出を行った。さらに、弱いピンニングを持つランダムウォークおよびランダム場のスケール極限に関する研究を、特に対応する大偏差原理の速度汎関数の最小点が一意でない場合に行った。

(8)竹田雅好

シュレディンガー半群において、その L^p -半群としてのスペクトル半径が p に依らないための十分条件を得た。次元拡散過程の生成するマルコフ半群に適用すると、フェラーの境界分類で自然境界以外の場合には L^p -独立性が成立することが示せた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 34 件)すべて査読有り

1 M.T. Barlow, R.F. Bass and T. Kumagai, Parabolic Harnack inequality and heat kernel estimates for random walks with long range jumps, Math. Z. 261 (2009), 297--320.

2 M.T. Barlow, A. Grigor'yan and T. Kumagai, Heat kernel upper bounds for jump processes and the first exit time, J. Reine

Angew. Math. 626 (2009), 135--157.

3 J. Kigami, Doubling Measures and heat kernel estimates on self-similar sets, Memoirs of Amer. Math. Soc., 199/932 (2009).

4 M.T. Barlow, A. Jarai, T. Kumagai and G. Slade, Random walk on the incipient infinite cluster for oriented percolation in high dimensions, Comm. Math. Phys., 278 (2008), 385--431.

5 R.F. Bass and T. Kumagai, Symmetric Markov chains on Z^d with unbounded range, Trans. Amer. Math. Soc. 360 (2008), 2041--2075.

6 Z.-Q. Chen and T. Kumagai, Heat kernel estimates for jump processes of mixed types on metric measure spaces, Probab. Theory Related Fields 140 (2008), 277--317.

7 Z.-Q. Chen, P. Kim and T. Kumagai, Weighted Poincaré inequality and heat kernel estimates for finite range jump processes, Math. Ann. 342, (2008), 833--883.

8 D. Croydon and T. Kumagai, Random walks on Galton-Watson trees with infinite variance offspring distribution conditioned to survive, Electron. J. Probab., 13 (2008), 1419--1441.

9 T. Kumagai and J. Misumi, Heat kernel estimates for strongly recurrent random walk on random media. J. Theoret. Probab. 21 (2008), 910--935.

10 A. Grigor'yan and T. Kumagai, On the dichotomy in the heat kernel two sided estimates, Proc. of Symposia in Pure Math. 77, pp. 199--210, Amer. Math. Soc. (2008).

11 H. Aikawa, Equivalence between the boundary Harnack principle and the Carleson estimate, Math. Scad., 103, 1 (2008), 61--76.

12 H. Aikawa and K. Hirata, Doubling conditions for harmonic measure in John domains, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 58 (2008), 429--445.

13 H. Aikawa, Boundary Harnack principle and the quasihyperbolic boundary condition, in Sobolev Spaces in Mathematics II, Applications in Analysis and Partial Differential Equations, Springer Verlag (2008), 19-30.

14 J. Kigami, Measurable Riemannian geometry on the Sierpinski gasket: the Kusuoka measure and the Gaussian heat kernel estimate, Math. Ann. 340 (2008), 781--804.

15 M. Hino, Martingale dimensions for fractals, Ann. Probab. 36 (2008), 971--991.

16 M. Takeda, Large deviations for additive functionals of symmetric stable processes, J. Theoret. Probab. 21 (2008), 336--355.

17 H. Aikawa, T. Kilpeläinen, N. Shanmugalingam and X. Zhong, Boundary Harnack principle for p-harmonic functions in smooth Euclidean domains, Potential Anal. 26 (2007), 281--301.

18 I. Shigekawa, Schrödinger operators on the Wiener space, Commun. Stoch. Anal. 1 (2007), 1--17.

19 T. Funaki, Dichotomy in a scaling limit under Wiener measure with density, Electron. Comm. Probab. 12 (2007), 173--183.

20 T. Funaki and K. Ishitani, Integration by parts formulae for Wiener measures on a path space between two curves, Probab. Theory Related Fields 137 (2007), 289--321.

21 M. Takeda, Gaussian bounds of heat kernels for Schrödinger operators on Riemannian manifolds, Bull. Lond. Math. Soc. 39 (2007), 85--94.

22 M. Takeda, L^p -independence of spectral bounds of Schrödinger type semigroups, J. Funct. Anal. 252 (2007), 550--565.

23 M. Takeda, Branching Brownian motions on Riemannian manifolds: expectation of the number of branches hitting closed sets, Potential Anal. 27 (2007), 61--72.

24 M. Takeda and K. Tsuchida, Differentiability of spectral functions for symmetric α -stable processes, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), 4031--4054.

25 M.T. Barlow, R.F. Bass and T. Kumagai, Stability of parabolic Harnack inequalities on metric measure spaces, J. Math. Soc. Japan 58 (2006), 485--519.

26 M.T. Barlow and T. Kumagai, Random walk on the incipient infinite cluster on trees, Illinois J. Math. 50 (2006), 33--65.

27 M. Hino and T. Kumagai, A trace theorem for Dirichlet forms on fractals, J. Funct. Anal. 238 (2006), 578--611.

28 H. Aikawa, K. Hirata and T. Lundh, Martin boundary points of a John domain and unions of convex sets, J. Math. Soc. Japan 58 (2006), 247--274.

29 H. Aikawa and N. Shanmugalingam, Hölder estimates of p-harmonic extension operators, J. Differential Equations 220 (2006), 18--45.

30 I. Shigekawa, Defective intertwining property and generator domain,

- J. Funct. Anal. 239 (2006), 357--374.
 31 T. Miyokawa and I. Shigekawa, On equivalence of L^p -norms related to Schrödinger type operators on Riemannian manifolds, Probab. Theory Related Fields 135 (2006), 487--519.
 32 M. Hino and K. Nakahara, On singularity of energy measures on self-similar sets. II, Bull. London Math. Soc. 38 (2006), 1019--1032.
 33 T. Funaki, Y. Hariya, F. Hirsch and M. Yor, On the construction of Wiener integrals with respect to certain pseudo-Bessel processes, Stochastic Process. Appl. 116 (2006), 1690--1711.
 34 M. Takeda, Gaugeability for Feynman-Kac functionals with applications to symmetric α -stable processes, Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006), 2729--2738.

〔学会発表〕(計 19 件)

- 1 相川弘明、複雑領域上の正調和関数、日本数学会年会(企画特別講演)、2009年3月29日、東京大学
- 2 熊谷隆、Convergence of symmetric Markov chains on Z^d , AMS-SMS joint meeting, 2008年12月18日、Fudan大学(中国)
- 3 舟木直久、Scaling limits for weakly pinned random walks with two large deviation minimizers, Workshop "Interplay of Analysis and Probability in Physics", 2008年12月4日、Oberwolfach研究所
- 4 重川一郎、Non symmetric diffusions on a Riemannian manifold, The 1st MSJ-SI, Probabilistic Approach to Geometry, 2008年8月8日、京都大学
- 5 日野正訓、Energy measures and derivatives on p. c. f. self-similar sets, 3rd Conference on Analysis and Probability on Fractals, 2008年6月13日、Cornell大学
- 6 熊谷隆、Uniqueness of Brownian motion on Sierpinski carpets, Stochastic Analysis, 2008年6月5日、Oberwolfach研究所
- 7 熊谷隆、Heat kernel estimates for recurrent random walk on random media, Random systems from physics to biology, 2008年3月20日、Berlin工科大学
- 8 熊谷隆、Diffusion on the scaling limits of critical percolation clusters in the diamond hierarchical lattice, Stochastic calculus on manifolds, graphs, and Random structures, 2007年10月12日、Hausdorff研究所(ドイツ)

- 9 相川弘明、半一様領域と調和測度のダブリング性について、第50回函数論シンポジウム、2007年10月7日、桐生市市民文化センター
- 10 舟木直久、大規模相互作用系の確率解析とその展開、日本数学会秋季総合分科会総合講演、2007年9月22日、東北大学
- 11 重川一郎、The dual ultracontractivity and its applications, Dirichlet Forms, Stochastic Analysis and Interacting Systems, 2007年9月21日、Berlin工科大学
- 12 熊谷隆、Heat kernel estimates and Harnack inequalities for jump processes, LMS Durham sympo.: Recent developments in random walks, 2007年7月6日、Durham大学
- 13 木上淳、Measurable Riemannian geometry on the Sierpinski gasket, Analysis on Graphs and Fractals (Newton Institute satellite conference), 2007年5月29日・6月2日、Cardiff大学
- 14 熊谷隆、Random walk on the incipient infinite cluster for trees and for oriented percolation, BIRS Workshop: Random media, 2006年11月、Banff(カナダ)
- 15 木上淳、Structure of rationally ramified self-similar sets, Analysis and Probability on Fractals (special session in 1021st AMS meeting), 2006年10月28-29日、コネチカット大学
- 16 重川一郎、One dimensional diffusions conditioned to be non-explosive, ドイツ数学会年会 Mini Symposium 24 "Probability and Geometry", 2006年9月22日、ボン大学
- 17 竹田雅好、Large Deviations for Additive Functionals of Symmetric Stable Processes, International Conference on Stochastic Analysis and Its Applications, 2006年8月10日、ワシントン大学
- 18 日野正訓、Reflecting Ornstein-Uhlenbeck Processes on Path Spaces, International Conference on Stochastic Analysis and Its Applications, 2006年8月9日、ワシントン大学
- 19 舟木直久、The Brascamp-Lieb inequality and its applications, Hydrodynamic limits and particle systems, 2006年6月9日、De Giorgi Center(イタリア)

〔図書〕(計 1 件)

相川弘明、複雑領域上のディリクレ問題 - ポテンシャル論の観点から、岩波書店、2008年、302 ページ

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.math.kyoto-u.ac.jp/kumagai/>

6 . 研究組織

(1)研究代表者

熊谷 隆 (KUMAGAI TAKASHI)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：90234509

(2)研究分担者

相川 弘明 (AIKAWA HIROAKI)
北海道大学・大学院理学研究院・教授
研究者番号：20137889

木上 淳 (KIGAMI JUN)
京都大学・大学院情報学研究科・教授
研究者番号：90202035

重川 一郎 (SHIGEKAWA ICHIRO)
京都大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：00127234

日野正訓 (HINO MASANORI)
京都大学・大学院情報学研究科・准教授
研究者番号：40303888

(3)連携研究者

舟木 直久 (FUNAKI TADAHISA)
東京大学・大学院数理科学研究科・教授
研究者番号：60112174

高橋 陽一郎 (TAKAHASHI YOUICHIRO)
京都大学・数理解析研究所・教授
研究者番号：20033889

竹田 雅好 (TAKEDA MASAYOSHI)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：30179650

小谷 元子 (KOTANI MOTOKO)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：50230024

注：小谷氏は2007年度からの連携研究者