

研究種目：基盤研究 (B)

研究期間：2006～2009

課題番号：18340028

研究課題名 (和文) 非可換統計学における量子情報幾何学的方法

研究課題名 (英文) Quantum information geometrical methods in noncommutative statistics

研究代表者

藤原 彰夫 (FUJIWARA AKIO)

大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：30251359

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般 (含確率論・統計数学)

キーワード：情報幾何学, 非可換統計学

### 1. 研究計画の概要

本研究は、量子推定理論や量子情報理論の諸問題におけるこれまでの研究成果を統合・発展させ、非可換統計学における量子情報幾何学的方法の確立をめざすものである。

### 2. 研究の進捗状況

(1) 研究代表者が先行研究において確立した量子 Cramer-Rao 不等式の操作的意味づけに基づき、未知の  $SU(D)$  を統計的に推定する問題を研究した。ここでは許容的推定量という概念を新たに導入すると共に、群の表現論的手法を駆使して、最適推定方式の下での量子 Fisher 計量が、各既約表現の Casimir 作用素と (定数倍を除いて) 一致することを明らかにし、これをもとに状態空間への  $SU(D)$  の最適埋め込み方法の量子情報幾何学を論じた。

(2) 「ランダムとは何か」という問いかけは、「情報とは何か」という問いかけとも関連する深遠な問題であり、古典・量子を問わず、確率的挙動を示すシステムの幾何構造を考える上で本質的な問題である。本研究では、ユニバーサル仮説検定的手法を用いて Martin-Loef ランダムネスの研究を行い、2つの測度に関して同時にランダムとなる系列を、 $|\alpha| < 1$  を満たす  $\alpha$ -ダイバージェンスで特徴づけることに成功した。

(3) 量子通信路の作用素和表現の任意性は、これまで単なる表現の冗長性として認識されていた。これに対し本研究では、量子通信路多様体を底空間とし、作用素和表現の自由度をファイバー空間とするファイバーバン

ドル構造を導入することにより、量子通信路の最適推定方式がファイバーバンドルの接続構造と密接な関係にあることを明らかにした。そしてこの描像を駆使し、これまで未解決であった量子 Fisher 情報量の拡大次数依存性が、殆どすべての通信路において  $O(n)$  となるという漸近特性を有することを明らかにした。

### 3. 現在までの達成度

② おおむね順調に進展している。  
(理由)

本研究計画立案時の最大の目標であった Chentsov の定理 (古典情報幾何学における Fisher 計量と  $\alpha$  接続の絶対的意義を確立した基本定理) の非可換拡張の研究については、残念ながら今のところ解決の目処は立っていない。しかし、非可換統計学における具体的事例に即した量子情報幾何学的方法の蓄積という第2の目標に関しては、順調に研究が進展している。

### 4. 今後の研究の推進方策

残された研究期間で、以下のような研究を行う。

(1) Le Cam 理論の非可換拡張を、測度論的および幾何学的観点から研究し、統計的に良い性質を有する量子 Gaussian 状態族の特徴づけを行う。

(2) 量子推定理論における最適測定を数値的に求めるアルゴリズムの研究を通じ、最適測定のみならず多様体の構造を研究する。

(3) Chentsov の定理の非可換拡張に向けて、可能な限り様々な角度からアプローチする。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計3件)

① Akio Fujiwara and Hiroshi Imai, ``A fibre bundle over manifolds of quantum channels and its application to quantum statistics,`` Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, vol.41, 255304 (2008).

② Akio Fujiwara, ``Randomness criteria in terms of  $\alpha$ -divergences,`` IEEE Transactions on Information Theory, vol.54, pp.1252-1261 (2008)

③ Hiroshi Imai and Akio Fujiwara, ``Geometry of optimal estimation scheme for SU(D) channels,`` Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, vol.40, pp.4391-4400 (2007).

[学会発表] (計3件)

① Akio Fujiwara, ``Information geometrical methods in quantum statistics,`` The 10<sup>th</sup> RIES-Hokudai International Symposium on aya, 2008年12月8日, 北海道大学

② Akio Fujiwara, ``Fibre bundle over manifolds of quantum channels and its application to quantum statistics,`` BSI Forum - Mini Symposium on Information Geometry, 2008年5月29日, 理化学研究所.

③ Hiroshi Imai and Akio Fujiwara, ``Fibre bundle over manifolds of quantum channels and its application to quantum statistics,`` GSIS & DEX-SMI Workshop on Quantum Statistical Inference and Entanglement, 2008年2月12日, 東北大学.