

平成 21 年 4 月 3 日現在

研究種目： 基盤研究 (B)

研究期間： 2006~2009

課題番号： 18340038

研究課題名 (和文) 確率解析の KdV 方程式・KdV 階層への応用の研究

研究課題名 (英文) Applications of stochastic calculus to the KdV equation and hierarchy

研究代表者

谷口説男 (TANIGUCHI SETSUO)

九州大学・大学院数理学研究院・教授

研究者番号： 70155208

研究分野： 確率解析

科研費の分科・細目： 数学・基礎解析学

キーワード： 確率解析, 確率振動積分, KdV 方程式, KdV 階層, 2 次ウィナー汎関数

1. 研究計画の概要

確率解析の解析学への応用の出発点は、拡散過程を用いて、微分方程式の解を確率振動積分(ラプラス-フーリエ型期待値)により表示できることである。たとえば、2 階偏微分作用素に付随する熱方程式の解の期待値表示はファイマン・カツの公式としてよく知られている。近年盛んな確率解析の数理ファイナンスへの応用も、このような確率解析と偏微分方程式の関連に基づいている。

Korteweg-de Vries(KdV) 方程式は浅水波を記述する方程式であり、この方程式に関しては非常に多くの解析的研究がなされている。とくにこの方程式はソリトン解、周期解と呼ばれる非常に興味深い挙動をする解を持っている。研究代表者は先立つ研究において KdV 方程式のソリトン解の期待値表現に成功していた。本研究は、その成果を元に、さらに KdV 方程式および KdV 階層の確率解析的手法による研究を行うこと、またそれに伴い必要となる確率解析の理論研究を行うことを目的とし遂行している。具体的には次のような問題の解明を目指している。

(A) 無反射ポテンシャル、ソリトン解、 τ 関数の収束の確率論的解析をおこなう。それぞれに対応するオレンシュタイン・ウーレンベック過程、および付随的なファイマン・カツ・ウェートの収束を解明する。

(B) 周期ポテンシャル、周期解の確率論的表示をえる。(A) で述べた無反射ポテンシャルの収束の確率論的証明を利用して、周期ポテンシャル、KdV 方程式の周期解に対する期待値表示を実現する。

(C) 無反射ポテンシャルの散乱データの自由度の増加にあわせて付随するオレンシュタ

イン・ウーレンベック過程の次元があがっていく。これは、オレンシュタイン・ウーレンベック過程と頂点作用素が関連していることを示唆する事実である。このような頂点作用素との関連の解明を目指している。

(D) KdV 方程式に付随して現れる確率振動積分はこれまでに研究されていないタイプのものである。これから、確率振動積分の一般論の展開を行いたい。

2. 研究の進捗状況

(1) 無反射ポテンシャルの収束を、オレンシュタイン・ウーレンベック過程のブラウニアンシートによる実現を通じて、確率過程の収束と対応づけることができた。これにより一般化された無反射ポテンシャルのガウス過程およびガウス測度による期待値表示を実現した。この成果を後述論文 1 として公表した。

(2) 確率振動積分の具体表示を得ることがソリトン解の期待値表現において重要になる。まず、調和振動子に付随する 2 次ウィナー汎関数のマリアヴァン微分のノルムを相関数とする確率振動積分の初等関数による具体的な表示を確立し、論文 2 として発表した。つぎに(1)の考察で重要となったブラウニアンシートに関する相関数を持つ確率振動積分の具体表現を得、論文 6 で公表した。

(3) KdV 階層の確立解析的研究において不可欠なグラスマン多様体との関連について、より一般に確率振動積分の具体表現の条件付けでの変動とブリュッカー座標の対応について解明し、論文 3 として発表した。

(4) 非線形 PDE 研究者との交流を図り、サーベイ論文 4、概説講演 5 を行った。

(5) 調和振動子研究中に、非可換調和振動子作用素への確率振動積分の応用を見だし、それを論文 5 として発表した。

3. 現在までの達成度

① 当初の計画以上に進展している。

(理由) 計画における(A), (B), (D)の課題を部分的にはあるが解明することができた。本研究は、KdV 方程式・階層に特化したテーマであるが、(D)に述べた確率振動積分研究を広げるような成果を得たことは、高く評価されるべきである。とくに、グラスマン多様体との関連や非可換調和振動子作用素との関連など、代数的構造との対応が見つかったことは非常に意義深い。

4. 今後の研究の推進方策

(1) 広田微分を伊藤解析の視点から確率振動積分表示に取り込むことにより、(C)の課題にとりくむ。

(2) 確率空間のフォック空間分解とソリトン理論におけるフォック空間分解との関連について調べる。

(3) 確率振動積分の具体表示の一般論、とくにブラウニアンシートに関わる場合についてより多くの具体例の構築を図る。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

1. S. Taniguchi, Brownian sheet and reflectionless potentials, Stoch. Pro. Appl., 116 (2) (2006), 293-309.
2. S. Taniguchi, On the Quadratic Wiener Functional Associated with the Malliavin Derivative of the Square Norm of Brownian Sample Path on Interval, Electron. Comm. Probab. 11 (2006), 1-10.
3. S. Taniguchi, On the Jacobi field approach to stochastic oscillatory integrals with quadratic phase functions, Kyushu Jour. Math., 61-1 (2007), 191-208.
4. S. Taniguchi, Stochastic calculus and the KdV equation, in "Stochastic Analysis and Partial Differential equations", eds. G.-Q. Chen, E. Hsu, and M. Pinsky, Contemp. Math., 429 (2007), 245-256.
5. S. Taniguchi, The heat semigroup and kernel associated with certain non-commutative haramonic oscillators, Kyushu Jour. Math., 62-1 (2008),

63-68.

6. S. Taniguchi, Quadratic Wiener functionals of square norms on measure spaces, Commun. Stoch. Anal. 2 (2008), 11-26.

[学会発表] (計 5 件)

1. 谷口説男, 2 次相関数を持つ確率振動積分 -Plucker座標, ブラウニアンシート-, 九州確率論セミナー, 2006 年 7 月 21 日, 熊本大学
2. 谷口説男, Conditioning quadratic Wiener functionals and Plucker coordinates -- with a new example --, 確率論とその周辺, 2006 年 10 月 26 日, 京都大学
3. 谷口説男, The heat semigroup and kernel associated with certain non-commutative haramonic oscillators, 確率論とその周辺, 2006 年 10 月 26 日, 京都大学
4. 谷口説男, Stochastic oscillatory integrals with quadratic phase function, DMHF2007:COE Conference, 2007 年 10 月 3 日, 福岡リーセントホテル
5. 谷口説男, 確率解析のKdV方程式への応用について, 九州大学応用力学研究所平成 20 年度共同利用研究集会『非線形波動の数理と物理』, 2008 年 11 月 7 日, 九州大学

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ:

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~taniguch/>