

平成 22 年 3 月 31 日現在

研究種目：基盤研究(B)

研究期間：2006～2009

課題番号：18340038

研究課題名（和文） 確率解析の KdV 方程式・KdV 階層への応用の研究

研究課題名（英文） Applications of stochastic calculus to the KdV equation and hierarchy

研究代表者

谷口 説男 (TANIGUCHI SETSUO)

九州大学・大学院数理学研究院・教授

研究者番号：70155208

研究成果の概要（和文）：確率振動積分の KdV 方程式・KdV 階層への応用を目指し、確率解析の基礎理論の整備を行った。無反射ポテンシャルの収束への確率解析の応用、確率振動積分の具体表現、非可換方程式へ確率解析の応用などさまざまな新たな応用で成果を得た。さらに、ブラウニアンシートに基づく新たな Wiener 汎関数の解析を行った。また、確率振動積分と Jacobi 方程式の関連を明らかにし、それにより代数解析学的意味づけに成功した。

研究成果の概要（英文）：A deep study of the theory of Stochastic Calculus was made, aiming to apply stochastic oscillatory integrals to the KdV equation and the KdV hierarchy. Several new results in Stochastic Calculus are obtained: an application of stochastic representation to the convergence of reflectionless potentials, concrete expression of stochastic oscillatory integral, a Wiener integral representation approach to non commutative harmonic oscillator. Moreover, a new Wiener functional of the Brownian sheet was investigated. Finally, the relationship between stochastic oscillatory integrals and Jacobi equations was studied to understand stochastic oscillatory integrals from the point of view of algebraic analysis.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,600,000	0	1,600,000
2007年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2008年度	1,500,000	450,000	1,950,000
2009年度	1,500,000	450,000	1,950,000
年度			
総計	6,100,000	1,350,000	7,450,000

研究分野：確率解析

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：確率解析，確率振動積分，KdV 方程式，KdV 階層，2 次ウィナー汎関数

## 1. 研究開始当初の背景

確率解析の解析学への応用の出発点は、拡散過程を用いて、微分方程式の解を確率振動積分(ラプラス-フーリエ型期待値)により表示できることである。たとえば、2階偏微分作用素に付随する熱方程式の解の期待値表示はファインマン・カッツの公式としてよく知られている。近年盛んな確率解析の数理ファイナンスへの応用も、このような確率解析と偏微分方程式の関連に基づいている。

Korteweg-de Vries(KdV)方程式は浅水波を記述する方程式であり、この方程式に関しては非常に多くの解析的研究がなされている。とくにこの方程式はソリトン解、周期解と呼ばれる非常に興味深い挙動をする解を持っている。研究代表者は先立つ研究においてKdV方程式のソリトン解の期待値表現に成功していた。

## 2. 研究の目的

本研究は、研究代表者の得ていた成果を元に、さらにKdV方程式およびKdV階層の確率解析的手法による研究を行うこと、またそれに伴い必要となる確率解析の理論研究を行うことを目的とし遂行した。具体的には次のような問題の解明を目指した。

- (A) 無反射ポテンシャル、ソリトン解、 $\tau$ 関数の収束の確率論的解析。
- (B) 周期ポテンシャル、周期解の確率論的表示の確立。
- (C) オレンシュタイン・ウーレンバック過程と頂点作用素が関連の解明。
- (D) 確率振動積分の一般論の展開。

## 3. 研究の方法

フーリエ・ラプラス型の確率振動積分の基礎理論をより詳細かつ一般に展開する、次のような方法により研究を推進した：

- (1) オレンシュタイン・ウーレンバック過程のブラウニアンシートによる実現を無反射ポテンシャルの収束に応用。
  - (2) 確率振動積分の具体表現の新しい例を構築。
  - (3) 確率振動積分の代数解析学的意味づけ。
  - (4) 国内外の非線形PDE研究者との交流。
  - (5) 非可換方程式への確率振動積分の応用。
  - (6) オレンシュタイン・ウーレンバック過程の新たな汎関数積分の解析。
- これらの推進にあたり、国内・海外確率解

析・非線形PDE研究者との交流、情報交換、研究討論などに研究旅費を利用し、また論文作成、情報交換、情報袖手集に必要となる書籍、パーソナルコンピュータなどの購入などに研究設備備品費を使用した。

## 4. 研究成果

(1) 無反射ポテンシャルの収束を、オレンシュタイン・ウーレンバック過程のブラウニアンシートによる実現を通じて、確率過程の収束と対応づけることができた。先行する成果において $2n$ 次元の散乱データに付随する古典的無反射ポテンシャルを $n$ 次元ウィナー空間上で実現していたが、これでは基礎空間が $n$ に依存するため $n \rightarrow \infty$ とする収束を議論することができず、確率解析的に一般化された無反射ポテンシャルを無反射ポテンシャルの極限として表現することはできていなかった。ブラウニアンシートに付随するウィナー・伊藤積分を利用し古典的無反射ポテンシャルと一般化された無反射ポテンシャルの確率積分表現を与え、その被積分関数の収束を無反射ポテンシャルの収束に対応させることに成功した。この表現を経由して、一般化された無反射ポテンシャルのガウス過程およびガウス測度による期待値表示が実現できた。この成果を後述論文⑧として公表した。

(2) 確率振動積分の具体表示を得ることがソリトン解の期待値表現において重要になる。まず、調和振動子に付随する2次ウィナー汎関数のマリアヴァン微分のノルムを相関数とする確率振動積分の初等関数による具体的な表示を確立し、論文⑦として発表した。調和振動子のマリアヴァン微分に対する確率振動積分を求めることは、ウィナー空間上での停留位相法の実現に対する具体的な事例として重要であった。本成果においては、まず $\cosh$ ,  $\sinh$ の線形和の分数を用いて確率振動積分を表示した。この分数表現の極を詳細に解析することにより、確率振動積分のフーリエ逆変換を具体的に求め、著輪振動子のマリアヴァン微分のノルムの定める確率分布の確率密度関数を特殊関数の無限級数を利用して表示した。

さらに、(1)の考察で重要となったブラウニアンシートに関する相関数を持つ確率振動積分の具体表現を得、論文③で公表した。この成果においては、ブラウニアンシートの

正方領域での自乗ノルムを典型例とする，パラメータづけられた1次元ウィナーカオスのパラメータ空間上での自乗ノルムを相関数とする確率振動積分に対する確率振動積分の具体的な無限積表示を証明した．これを利用して，ブラウニアンシートの正方領域における自乗ノルムを相関数とする確率振動積分を初等関数の無限積として表示することに成功した．

(3) KdV 階層の確率解析的研究において不可欠なグラスマン多様体との関連について，より一般に確率振動積分の具体表現の条件付けでの変動とプリュッカー座標の対応について解明し，論文⑥として発表した．確率振動積分の解析にプリュッカー座標が重要な役割を果たすことは，既にレヴィの確率面積の場合に，池田信行と原啓介により指摘されていたが，一般的な確率振動積分に対する解析はなされていなかった．この研究においては，2次ウィナー汎関数の2階マリアヴェン微分として定まるヒルベルト・シュミット作用素を，ボルテラ型作用と有限次元値域を持つ作用素の和に分解し，ボルテラ作用素に対応する方程式 (Jacobi 方程式) を，有限次元境界条件を付けて解析することが，境界条件を与える基底方向に確率振動積分をピン留めすることと対応しており，その境界条件に自然にプリュッカー座標が現れることを明らかにした．確率振動積分のフレッドホルム行列表示から，プリュッカー座標との対応は自然なものといえるが，明示的にその対応を表示できたのは本研究結果が初めてである．

(4) 非線形 PDE 研究者との交流を図り，サーベイ論文⑤を公表し，概説講演①，②を行った．論文⑤では，単にサーベイというだけでなく，ランダムなノイズを持つ KdV 方程式のソリトン解を確率解析的に表示する新しい例についても公表した．実際，KdV 方程式にブラウン運動の時間微分を付加したランダムな KdV 方程式のソリトン解を，オレンシュタイン・ウーレンベック過程の自乗ノルムを相関数に持つ確率振動積分として表示できた．

(5) 調和振動子研究中に，非可換調和振動子作用素への確率振動積分の応用を見だし，それを論文②，④として発表した．

④においては，特別な非可換調和振動子に対しては，多様体上の微分形式に付随する熱方程式の解の確率解析的表示が適用できることを見出し，そのような行列型のウェイト関数をもつ期待値を利用して，非可換調和振動子に付随する熱方程式の熱半群，熱核を確

率解析的に表示できた．これにより，先行する解析的手法では証明に手間を要していた，特別な非可換調和振動子と調和振動子のユニタリ同値性を容易に導き出すことに成功した．

②においては，④の考え方をさらに進め，無限小変換として非可換調和振動子に付随する熱方程式を導出する熱半群を確率解析的に構成した．

(6) ガウス過程の二乗平均ノルムを利用して行っていた(1)の研究，とくにソリトン解のウィナー積分表示を，オレンシュタイン・ウーレンベック過程の定める確率面積を利用した積分表示に拡張した．また，この際に開発したウィナー空間上の変数変換公式を利用してオイラー多項式とレヴィの確率面積の対応を見出した．これらの成果は論文①として発表した．オイラー多項式とレヴィの確率面積の関係は，さらにコクセター群としての解釈が期待でき，現在その研究を進めている．

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

- ① N. Ikeda and S. Taniguchi, The Itô-Nisio theorem, quadratic Wiener functionals, and 1-solitons, *Stoch. Proc. Appl.* 120 (2010), 605–621. (査読有)
- ② S. Taniguchi, A Wiener integral approach to non-commutative harmonic oscillators, *Kyushu Jour. Math.*, 63-2 (2009), 347–352. (査読有)
- ③ S. Taniguchi, Quadratic Wiener functionals of square norms on measure spaces, *Commun. Stoch. Anal.* 2 (2008), 11–26. (査読有)
- ④ S. Taniguchi, The heat semigroup and kernel associated with certain non-commutative harmonic oscillators, *Kyushu Jour. Math.*, 62-1 (2008), 63–68. (査読有)
- ⑤ S. Taniguchi, Stochastic calculus and the KdV equation, in “Stochastic Analysis and Partial Differential equations”, eds. G.-Q. Chen, E. Hsu, and M. Pinsky, *Contemp. Math.*, 429 (2007), 245–256. (査読有)
- ⑥ S. Taniguchi, On the Jacobi field approach to stochastic oscillatory integrals with quadratic phase functions, *Kyushu Jour. Math.*, 61-1 (2007), 191–208. (査読有)

- ⑦ S. Taniguchi, On the Quadratic Wiener Functional Associated with the Malliavin Derivative of the Square Norm of Brownian Sample Path on Interval, Electron. Comm. Probab. 11 (2006), 1-10. (査読有)
- ⑧ S. Taniguchi, Brownian sheet and reflectionless potentials, Stoch. Pro. Appl., 116 (2) (2006), 293-309. (査読有)

[学会発表] (計 6 件)

- ① 谷口説男, Eigenvalues in stochastic oscillatory integrals, International workshop on verified computations and related topics, 2009年3月10日, Univ. Karlsruhe, Germany.
- ② 谷口説男, 確率解析の KdV 方程式への応用について, 九州大学応用力学研究所平成 20 年度共同利用研究集会『非線形波動の数理と物理』, 2008 年 11 月 7 日, 九州大学
- ③ 谷口説男, Stochastic oscillatory integrals with quadratic phase function, DMHF2007:COE Conference, 2007 年 10 月 3 日, 福岡リーセントホテル
- ④ 谷口説男, The heat semigroup and kernel associated with certain non-commutative harmonic oscillators, 確率論とその周辺, 2006 年 10 月 26 日, 京都大学
- ⑤ 谷口説男, Conditioning quadratic Wiener functionals and Plücker coordinates -- with a new example --, 確率論とその周辺, 2006 年 10 月 26 日, 京都大学
- ⑥ 谷口説男, 2 次相関数を持つ確率振動積分 -Plucker 座標, ブラウニアンシート-, 九州確率論セミナー, 2006 年 7 月 21 日, 熊本大学

[図書] (計 1 件)

- ① 谷口説男, 確率解析の KdV 方程式への応用について, 九州大学応用力学研究所平成 20 年度共同利用研究集会『非線形波動の数理と物理』プロシーディング, MI レクチャーノート Vol.17, 35-52, 2009 年

[その他]

ホームページ等

<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~taniguch/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

谷口説男 (TANIGUCHI SETSUO)

九州大学・大学院数理学研究院・教授  
研究者番号：70155208

### (2) 研究分担者

深井康成 (FUKAI YASUNARI)  
九州大学・大学院数理学研究院・助手  
研究者番号：1710292021  
(2006 年度, 2007 年度)

### (3) 連携研究者

深井康成 (FUKAI YASUNARI)  
九州大学・大学院数理学研究院・助教  
研究者番号：1710292021  
(2008 年度, 2009 年度)