

研究種目：基盤研究（B）

研究期間：2006～2009

課題番号：18340047

研究課題名（和文） 偏微分方程式の解に時間依存の特異点が現れる諸問題の新展開

研究課題名（英文） Research of partial differential equation with singular solutions

研究代表者 小俣 正朗

(OMATA SEIRO)

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号：20214223

研究分野：数学

科研費の分科・細目：大域解析学

キーワード：変分法・数値解析・自由境界・離散勾配流・特異点

1. 研究計画の概要

非線形偏微分方程式・変分問題で、解に特異点（**不連続点**、**微分不可能**な点など）が現れる問題は大変興味深い。標語的に言えば、グラフが「折れる」「切れる」などの特異集合を持つ関数が、微分方程式の解として考えられるようになった。さらに、このような特異集合がエネルギー集中などを起こしている、解析の対象とすべきものであることが多い。本研究では、変分問題の解の「エネルギー密度が集中している、定義域よりも低い次元の集合」を特異点として捉え、対応する**放物型**、さらには**双曲型**の問題に対して解析を行う。

2. 研究の進捗状況

本年度は双曲型および双曲型の体積保存問題とそれに関連する自由境界問題についての数学理論と数値計算方法の開発を引き続き行ってきた。**non-local term**を持つ退化双曲型自由境界問題は難問であったが、何とか基本アルゴリズムの開発を終えることができた。

この種の自由境界問題には、変分問題に基づく計算方法である離散勾配流法が大変有効であった。例えば、体積制約条件が無い場合の双曲型自由境界問題で近似方程式がうまく意味づけられ、弱解の構成が成功裏に行われた。また、自由境界付きでも空間次元が1の場合には体積保存条下である種の（非常に弱い）弱解の構成が行われた。

この問題は、物理的なイメージとしては、水面上の泡や、ガラス面上の液滴の時間発展ダイナミクスであり、その振動解析をするのが目標であった。空間微分の主要項を極小曲面方程式とすると自由境界が無くても解の存在が知られていない。よって、ここでは主要項はラプラシアンとした。これに対して、菊地・小俣等の結果が知られているだけであった。

これらの知見のもとに数学解析と数値計算を行った。1次元の場合で弱解の存在、2

次元の場合で、液滴の合体や分離も数値的に取り扱えるようになった。

さらに、内部構造をもつ物体の衝突問題も、この種の連成解析で実現できることが分かってきた。また、これに付随して出てきた放物型体積保存問題については、弱解の構成、弱解のヘルダー連続性を示すことに成功している。

研究は、補助金のおかげと研究分担者の協力により順調な進歩を見せている。今後は、高次元の場合の解の存在、衝突問題などベクトル値の問題などに発展の方向を見いだしたい。

3. 現在までの達成度

②おおむね順調に進展している。

（理由）

体積保存制約条件については、数学的に満足 of いく結果が出ている点で、順調に進捗していると判断される。まだ、自由境界の付いている場合に数学的な結果が十分ではない。数値的には良好な結果が得られている。

以上を総合すると進捗は順調であると判断される。

4. 今後の研究の推進方策

本研究で対象となる諸問題は方程式中に退化作用素、デルタ測度、non-local-term、が現れ、また特異極限操作なども求められる。昨年度までに境界付近をなめらかにする手法での結果が得られた。本年度は、シャープな突入角度を持つ場合に理論を展開していく計画である。特に、放物型体積保存自由境界問題で最終的な結果（シャープな突入角度を持つ、解のリプシッツ連続性と自由境界の $n-1$ 次元性を示すことを目指す。

また、離散勾配流法の取り扱いとしては、時間差分を0に収束させる時に、いかに良い評価を保って、良い解に収束するかが問題で

ある。放物型に対しては結果が得られつつあるので、さらに推し進めて最終結果を出したい。また、研究が若干遅れている双曲型に対して、自由境界条件をなますなど、正当な解と判断できるぎりぎりの関数空間で、理論の構築を行いたい。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計10件)

①M. Kazama - S. Omata "Modeling and computation of fluid-membrane interaction", Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Article in Press

②S. Omata - M. Kazama - H. Nakagawa, "Variational approach to evolutionary free boundary problems", Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications, Article in Press

③ K.Svadlenka, S.Omata, Mathematical analysis of a constrained parabolic free boundary problem describing droplet motion on a surface, to appear in Indiana University Mathematics Journal. Article in Press

④ K.Svadlenka, S.Omata, Construction of weak solution to hyperbolic problem with volume constraint, Nonlinear Analysis, 69 3202--3212(2008).

⑤K.Svadlenka, S.Omata, Construction of solutions to heat-type problems with volume constraint via the discrete Morse flow, Funkcialaj Ekvacioj, 50 261—285 (2007).

[学会発表] (計10件)

① S. Omata, Mathematical Theory and Numerical Calculations of Collision, Peeling and Attached Droplets, Invited Plenary Talk: The Second International Conference on Mathematics and Natural Sciences, Bandung Indonesia, 28-30 October 2008.

② S. Omata, Mathematical theory and numerical calculations of collision, peeling and attached droplets, Invited Speaker The Second China-Japan-Korea Workshop on Numerical Mathematics Weihai, Shandong Province, August 25-29, 2008

③ S. Omata, Variational approach to evolutionary free boundary problems, Keynote speaker (Invited Plenary talk) World Congress of Nonlinear Analysis 2008 at Florida (2008年7月2日から9日)

④ S. Omata, Motion of water droplets in contact with a surface, Ryukoku Workshop 2008 Recent Progress on Pattern Formation and Dynamics in Mathematical Sciences June 12 --14, 2008 龍谷大学 (6月12日 (木) ~ 14日 (土))

⑤ S. Omata, Droplet Motion on a plane, International Conference on Computational Science 3rd - 4th Dec. 2007. Bandung Invited Talk.