

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2006～2008

課題番号：18540002

研究課題名（和文） アフィントーリック多様体上の微分作用素環とその応用

研究課題名（英文） THE RING OF DIFFERENTIAL OPERATORS ON AN AFFINE TORIC VARIETY AND ITS APPLICATIONS

研究代表者

齋藤 睦 (SAITO MUTSUMI)

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号：70215565

研究成果の概要：アフィントーリック多様体上の（アフィン半群環の）微分作用素環 D の構造及びその（微分作用素の）階数による次数環 $\text{Gr}(D)$ の構造の研究についての研究に関して大きな進展があった。まず、いつも D は右ネターであることを示した。次に左ネター性についてであるが、左ネターであるための或る十分条件、或る必要条件を与え、さらに、必要十分条件を予想した。また、クリティカル D -加群の特徴付けを行い、単項生成の場合の分類を行った。さらに、 $\text{Gr}(D)$ がネター環のとき、 $\text{Gr}(D)$ の素イデアルを記述した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,200,000	0	1,200,000
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	660,000	4,060,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：微分作用素環、トーリック多様体、半群環、ネター性、 D -加群、超幾何系

1. 研究開始当初の背景

特異点のない多様体上の微分作用素環およびその上の加群の理論は代数解析学として壮大な理論体系が出来上がっている。一方、特異点のあるアフィン多様体上の微分作用素環については、一般にはネターでも有限生成でもなく難しい対象である。しかし、幾つかの特殊な場合は特異点のないときのような良い性質を持つ。多様体を（正規とは限らない）アフィントーリック多様体に限ったとき、どのようなアフィントーリック多様体に対

してどのような良い性質を持つのか、また、良い性質を持ったときにどのような代数幾何的性質を持つのか、どういう応用があるのか、などが問題となる。

2. 研究の目的

アフィントーリック多様体上の微分作用素環とその上の加群の構造の研究、超幾何微分方程式系や可換環論への応用の研究を行う。具体的には、その微分作用素環が右ネター、左ネターになるための条件を明らかにすること、階数に関する次数環がネターのときの代

数幾何的性質を明らかにすること、微分作用素環のクルル次元を求めること、アフィントーリック多様体上の関数環の可換環論的性質と微分作用素環の環論的性質との関係を明らかにすることを目的とする。

超幾何系への応用については、アフィントーリック多様体のアフィン空間への埋め込みに関する順像関手およびその右随伴関手の導来圏における振る舞いを明らかにすることを目的とする。可換環論への応用については、Castelnuovo-Mumford 正則性への応用を目指す。

3. 研究の方法

研究組織のメンバーで適宜インフォーマルなセミナーを開き議論するほか、国内外の研究集会に積極的に参加し、様々な研究者と議論し、理論を進展させる。

計算機などを使い、例を多く計算し、一般の場合を予想する。

4. 研究成果

齋藤睦により、アフィントーリック多様体上の（アフィン半群環の）微分作用素環 D の構造及びその（微分作用素の）階数による次数環 $\text{Gr}(D)$ の構造の研究に関して大きな進展があった。

最も重要な問題として D のネター性の問題がある。以前、Traves とともに $\text{Gr}(D)$ がネターであるための必要十分条件は、そのアフィン半群環が scored であるということを証明した。従って、scored なときは、 D が右ネターかつ左ネターであることが分かっていた。

まず、scored でなくとも、いつも D は右ネターであることを示した。証明は scored な微分作用素環から出発して Robson の補題を順次適用して、半群が生成する錐の面に平行なものを有限個抜いたものに対応する微分作用素環も右ネターであることを導くという手順である。A-超幾何系はアフィントーリック多様体上の微分作用素環の右加群と対応するので、右ネター性の証明は、A-超幾何系への応用という観点からも極めて重要である。

次に左ネター性についてであるが、そのために、微分作用素環の右加群と左加群の対応を考察した。半群環がセルの S_2 条件を満たしているとき、canonical module の類似が考えられ、それを使って右左対応が得られる。さらに、 S_2 条件よりも弱い或る条件の下でも同様のことができることが分かった。従って、この条件を満たしているとき、その半群環の微分作用素環は左ネターでもあることが分かった。

さらに、左ネターであるための或る必要条件を与え、必要十分条件を予想した。

次に $\text{Gr}(D)$ の構造について述べる。代数的トーラスの作用から D や $\text{Gr}(D)$ には自然に

多重次数付けられている。以降、述べる加群やイデアルはその意味で斉次であるとす。

まず、クリティカル D -加群の特徴付けを行い、単項生成の場合の分類を行った：

クリティカル加群というのは、簡単に言うと、同じ Krull 次元を持つ加群の中で、最も小さいものである。例えば、Krull 次元 0 のクリティカル加群はまさに単純加群ということである。逆に言うと、クリティカル加群は単純加群の一般化である。従って、クリティカル加群を知ることはネター環上の加群の理論において極めて基本的である。そこでまず、 D -加群の Krull 次元を言い換え、それとパラメータの分類を基にクリティカル D -加群の特徴付け、単項生成の場合の分類を行った。

さて、前述のように、 $\text{Gr}(D)$ がネターになるための必要十分条件は半群が scored であることである。そこでその場合の $\text{Gr}(D)$ の代数的考察が問題となる。その第一歩として $\text{Gr}(D)$ の素イデアルを記述した。それらは D -加群の特性多様体の成分の候補達であるが、或る条件をみたす素イデアルは単項生成クリティカル D -加群の特性多様体に一致することを示した。

山下博により、簡約デュアルペア（一方がコンパクト群の場合）に対する Howe 双対性定理の等方表現を用いた新しい証明が与えられたとともに（阿部紀行との共同研究）、離散系列に対する等方表現の構造について、勾配型不変微分作用素による理論が深化し、極小 K 型による明瞭な理解に到達した。

柳川浩二により、Koszul 環 A 上の有限生成次数付加群 M の linearity defect に関する結果を得た。簡単の為、 A が外積代数の場合に述べると、linearity defect は常に有限という Eisenbud らの結果を精密化し、加群 M の linearity defect の上限を、 M の length を用いて与えた他、 M が単項式イデアルの場合に、さらに顕著な結果を得た。また、toric face ring の双対化複体の簡潔な記述も得た。

島田伊知朗により、計算機と格子理論を用いた K_3 曲面の研究がおこなわれ、arithmetic Zariski pairs in degree 6 の発見などの成果をあげた。

沼田泰英により、多重超平面配置の自由性に関する研究、及び、Macdonald 多項式の 1 の冪根における挙動に関する研究が行われた。多重超平面配置に関する研究では、2 種類の辺を持つグラフによりパラメトライズされた或る多重超平面配置が自由になることと、グラフが signed-eliminable であることが同値であることを示した。また、Macdonald 多項式に関する研究では、1 の冪根での特殊値に関する factorization formula に対して、一対一対応の構成による組合せ論的な別証明を幾つかの場合に与えた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 14 件)

- ① Mutsumi Saito, Critical modules of the ring of differential operators of an affine semigroup algebra, to appear in Communications in Algebra, 査読有
- ② Mutsumi Saito, The spectrum of the graded ring of differential operators of a scored semigroup algebra, to appear in Communications in Algebra, 査読有
- ③ Noriyuki Abe and Hiroshi Yamashita, A note on Howe duality correspondence and isotropy representations for unitary lowest weight modules of $Mp(n, R)$, to appear in Journal of Lie Theory, 査読有
- ④ T. Abe, K. Nuida, and Y. Numata, Bicolor-eliminable graphs and free multiplicities on the braid arrangement, to appear in the Journal of the London Mathematical Society, 査読有
- ⑤ Mutsumi Saito and Ken Takahashi, Noetherian properties of rings of differential operators of affine semigroup algebras, to appear in Osaka Journal of Mathematics, Vol. 46 No.2 (2009), 査読有
- ⑥ Ichiro Shimada, Transcendental lattices and supersingular reduction lattices of a singular $K3$ surface, Trans. Amer. Math. Soc. 361, 909–949, (2009), 査読有
- ⑦ Kohji Yanagawa, Notes on C -graded modules over an affine semigroup ring $K[C]$, Comm. Algebra 36, 3122–3146, (2008), 査読有
- ⑧ Yasuhide Numata, Generalized Schur operators on planar binary trees, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B8, 85–97, (2008), 査読有
- ⑨ Ichiro Shimada, On arithmetic Zariski pairs in degree 6, Adv. Geom. 8, 205–225, (2008), 査読有
- ⑩ Mutsumi Saito, Primitive ideals of the ring of differential operators on an affine toric variety, Tohoku Mathematical Journal, 59, 119–144, (2007), 査読有
- ⑪ R. Okazaki and K. Yanagawa, Linearity defects of face rings, J. Algebra 314, 362–382, (2007), 査読有
- ⑫ Ichiro Shimada, On normal $K3$ surfaces. Michigan Math. J. 55, 395–416, (2007), 査読有
- ⑬ K. Yanagawa, BGG correspondence and Roemer's theorem on an exterior algebra, Algebr. Represent. Theory 9, 569–579, (2006), 査読有
- ⑭ K. Yanagawa, Castelnuovo–Mumford regularity for complexes and weakly Koszul modules, J. Pure Appl. Algebra 207, 77–97, (2006), 査読有

[学会発表] (計 21 件)

① 齋藤 睦, A -hypergeometric irreducible modules, 研究集会「超幾何方程式研究会 2009」, 7 Jan. 2009, 神戸大学

② Ichiro Shimada, Generalized Zariski–van Kampen theorem and its application to Grassmannian dual varieties, Conference on Topology–Geometry–Algebra–Arithmetic, 22 Dec. 2008, Dalat University, Dalat, Vietnam

③ 柳川浩二, Dualizing complex of a toric face ring – Normal and non-normal cases, 第 30 回可換環論シンポジウム, 2008 年 11 月 20 日, 国民宿舎虹の松原ホテル

④ Y. Numata, A bijective proof for a factorization formula of modified Macdonald polynomial at roots of unity, Workshop on Representation Theory, Geometry and Combinatorics, 4 June 2008, Univ. of California, Berkeley, USA

⑤ Mutsumi Saito, Critical modules of rings of differential operators of affine semigroup algebras, AMS Spring Central Sectional Meeting, Special Session on D -modules, 5 Apr. 2008, Indiana University USA

⑥ K. Yanagawa, Squarefree modules over a toric face ring, International Conference on Commutative Algebra, 2008 年 3 月 21 日, 横浜市開港記念会館

⑦ 齋藤 睦, A-hypergeometric systems and D-modules on an affine toric variety, 「第3回代数・解析・幾何学セミナー」, 18 Feb. 2008, 鹿児島大学理学部.

⑧ Hiroshi Yamashita, Geometric invariants associated with the discrete series representations, NCTS 2008 Winter Workshop on Representation Theory, 26, 29 Jan. 2008, National Center for Theoretical Sciences, Taiwan

⑨ Y. Numata, Generalized Schur operators on rooted planar binary trees, The 10th Hokkaido University-Soeul National University Joint Symposium, 25 Jan. 2008, Soeul, Korea

⑩ Ichiro Shimada, Non-homeomorphic conjugate complex varieties, The 6th Polish-Japanese Singularity Theory Working Days, 12 July 2007, Sopot, Poland

⑪ Y. Numata, Tabloids and weighted sums of characters of certain modules of the symmetric groups, The 19th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC' 07), 3 July 2007, Center for Combinatorics, Nankai Univ., Tianjin, China

⑫ K. Yanagawa, Regularities of cochain complexes and Koszul duality, Castelnuovo-Mumford Regularity and Applications, 2007年6月15日, マックスプランク数学研究所 ライプツィヒ(独)

⑬ Hiroshi Yamashita, Nilpotent orbits and associated cycles for unitary highest weight Representations, 2007 Nankai Summer School, Representation Theory and Harmonic analysis, 14, 21 June 2007, Chern Institute of Mathematics, Nankai University, China

⑭ Mutsumi Saito, Left D-modules and right D-modules on affine toric varieties, 研究集会「Theoretical Effectivity and Practical Effectivity of Groebner bases」, 25 Jan. 2007, 京都大学数理解析研究所

⑮ 柳川浩二, BGG 対応と組合せ論的可換代数, 研究集会「計算可換代数と計算代数幾何」, 2007年1月15日, 京都大学数理解析研究所

⑯ 柳川浩二, Linearity defect of graded modules over an exterior algebra, 第39

回環論および表現論シンポジウム, 2006年9月16日, 広島大学

⑰ Ichiro Shimada, Singularities of dual varieties in characteristic 3, International Symposium on singularity theory and its applications, 7 Sep. 2006 Changsha, China

⑱ Mutsumi Saito, D-modules on affine toric varieties and A-hypergeometric systems, Workshop 'Rings, Combinatorics and their related topics', 5 Sep. 2006, Hokkaido Univ.

⑲ 齋藤 睦, 決定方程式系とグレブナー基底, 研究集会「グレブナー基底 夏の学校」, 31 Aug. 2006, 京都大学数理解析研究所

⑳ 山下 博, 離散系列に対する等方表現一勾配型不変微分作用素とモーメント写像, ワークショップ「保型形式と微分方程式」, 2006年7月16日, 東京大学玉原国際セミナーハウス

㉑ 齋藤 睦, アフィントーリック多様体上の微分作用素環の原始イデアルの数え上げ, 研究集会「計算代数解析とその周辺」, 8 June 2006, 京都大学数理解析研究所

〔図書〕(計2件)

① 山下 博(述)阿部紀行(記), 東京大学数理科学レクチャーノート3 (Lecture Notes in Mathematical Sciences, The University of Tokyo, Vol.3), 簡約リー群の表現と冪零軌道, (2008) 80 pages.

② 齋藤 睦, 数学書房, グレブナー基底の現在 (日比孝之編)「第7章 決定方程式系とグレブナー基底」, (2006), 153--175

6. 研究組織

(1) 研究代表者

齋藤 睦 (SAITO MUTSUMI)

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

研究者番号: 70215565

(2) 研究分担者

(2006年度~2008年度)

山下 博 (YAMASHITA HIROSHI)

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号: 30192793

(2006年度、2007年度)

柳川 浩二 (YANAGAWA KOHJI)

関西大学・システム理工学部・准教授

研究者番号：40283006

島田 伊知朗 (SHIMADA ICHIRO)

広島大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：10235616

(2007年度)

沼田 泰英 (NUMATA YASUhide)

稚内北星学園大学・情報メディア学部・講師

研究者番号：00455685

(3)連携研究者

(2008年度)

柳川 浩二 (YANAGAWA KOHJI)

関西大学・システム理工学部・准教授

研究者番号：40283006

島田 伊知朗 (SHIMADA ICHIRO)

広島大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：10235616

沼田 泰英 (NUMATA YASUhide)

稚内北星学園大学・情報メディア学部・講師

研究者番号：00455685