

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2006～2009

課題番号：18540006

研究課題名 (和文) 擬似循環連分数の特殊関数による研究

研究課題名 (英文) Research on Quasi-periodic continued fractions in terms of Special functions

研究代表者

小松 尚夫 (KOMATSU TAKAO)

弘前大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：70300556

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：整数論, 関数論, 組合せ論, 代数学

1. 研究計画の概要

(1) 与えられた無理数に対して無限単純連分数は一意に定められる。このとき連分数に現れる数からなる部分商列がどんなパターン或いは規則性を示すかが注目される。二次無理数の場合部分商列は循環し、逆に部分商列が循環するような連分数を与える実数は二次無理数に限ることが知られている。

e や $\tan 1$ などの連分数は厳密には循環しないが、循環節に多項式が現れるという規則性を持ち、擬似循環する。このような連分数を Hurwitz 連分数というが、この多項式部分を指数関数で置き換えた Tasoiev 連分数を提唱し、一般的性質を調べてきた。

(2) しかし、擬似循環する連分数については、Hurwitz 連分数であっても多項式部分が2次以上の具体例が知られていないなど未知の部分が多く、Tasoiev 連分数とともに特殊関数を使った再構成が示唆されてきた。特に、超幾何関数、Ramanujan の q 関数、Bessel 関数などとの関連性が考えられる。

(3) さらに関数的な議論が成熟すれば、個々の関数の持つ様々な性質が適用でき、ディオファントス理論、超越数論、組合せ論などへの応用が考えられる。また、整数から代数体などへの拡張も可能である。

2. 研究の進捗状況

(1) Hurwitz 連分数や Tasoiev 連分数のさらに新しいタイプが発見されてきている。特に、Ramanujan の q 関数からの視点で、今までとは少し異なったタイプの連分数が発見されてきている。さらに、Perron の変換公式を用いることで、今までのタイプの拡張型が導かれることがわかった。また応用として、新し

いタイプの Hurwitz 連分数や Tasoiev 連分数を与える実数に対して、無理数度を求めることが可能になってきている。また、別のカテゴリーとして、二次無理数について定義されていた N 連分数なるものが、擬似循環連分数についても定義され、Hurwitz 型の連分数からの変換として具体例が示された。

(2) 連分数の近似分数の分母・分子がそれぞれ満たす漸化関係式を拡張した leaping convergents の関係式が様々な面白い性質をもつことがわかってきた。実数の近似に leaping convergents が有効であることはわかっていたが、法による周期性で画期的な成果が得られてきている。当初は自然対数の底である e について leaping convergents を考えていたが、様々な実数やさらに一般数列にさえ定義できることがわかってきた。さらに leaping convergents はある種の漸化関係式をみたますが、この関係式を拡張することにより、非正規の連分数のみならず関係式や一般の三項関係式へ発展できることもわかってきた。

(3) ディオファントス方程式や超越数との関連で、ピタゴラスの三つ組みをなす数による擬似周期連分数を生じるある種の実数の近似評価が得られている。さらに別種の2次や3次のディオファントス方程式をみたます数による近似についても同様の結果が導き出されてきている。また、フィボナッチ型のゼータ関数の値について代数的独立性や超・超越性の結果が示されてきている。

3. 現在までの達成度

①当初の計画以上に進展している。

(理由)

擬似循環連分数の近似分数から発展した **Leaping convergents** の概念が著しい展開を見せ、いろいろな結果をもたらしている。当初は実数 e についてのみの限定された性質かと思われていたが、 \tan や \tanh などの関数の値についても適用できることがわかり、これからさらに一般の単純擬似循環連分数の場合に拡張され、さらにまた、単純でない擬似循環連分数の場合、そして通常の三項関係式の場合へと至っている。

ディオファントス方程式をみたす数による近似問題でも、3次以上の方程式においても類似の結果が出るのがわかってきており、さらなる展開が考えられる。

4. 今後の研究の推進方策

(1) **Leaping convergents** の概念をさらに推進し、より一般の場合の性質を調べたり、さらに一般化して四項以上の漸化関係式に発展させたりしていきたい。また、逆方向の視点から、与えられた漸化関係式をみたすような連分数を構成し、分類していくことも面白い。また、**leaping convergents** をなす数の周期性についてはまだ粗い結果しか出ていないので、精密な結果を求めていきたい。

(2) ディオファントス方程式が3次以上の場合の取り扱いを追究し、近似結果の精度を高めていく。また、近似結果を求める際の変換関数として、擬似循環連分数を与える e のタイプの指数関数を考えてきたが、 \tan や \tanh などの関数でも可能ではないかと思われる。これが成功すれば、より一般の関数についてさらに拡張を試みていきたい。

(3) Hurwitz 連分数や Tasoev 連分数において新しい型のものが発見されてきているが、これらに属さない連分数はまだ知られていない。また、連分数から実数を分類するという逆方向の研究についてもまだ十分に行われているとは限らない。これからの研究の課題である。

(4) Hurwitz 連分数や Tasoev 連分数を代数体などで扱うことも考えられるので、より一般の代数体で構成できるかどうかは課題である。

5. 代表的な研究成果

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計4件)

- ① Carsten Elsner and Takao Komatsu, On the residue classes of integer sequences satisfying a linear three-term

recurrence formula, *Linear Algebra Appl.* 429, 993—947, 2008. 査読有り

- ② Carsten Elsner, Takao Komatsu, and Iekata Shiokawa, Approximation of values of hyperbolic functions by restricted rationals, *J. Theorie des Nombres de Bordeaux*, 19, 393—404, 2007. 査読有り

- ③ Takao Komatsu, Hurwitz continued fractions with confluent hypergeometric functions, *Czech. Math. J.* 57, 919—932, 2007. 査読有り

- ④ Takao Komatsu, Continued fraction of e^2 with confluent hypergeometric functions, *Liet. Mat. Rink.* 46, 513—531, 2006. 査読有り

[図書] (計1件)

- ① Takao Komatsu, *Diophantine Analysis and Related Fields - DARF 2007/2008*, American Institute of Physics, pp.211, 2008.