

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2006～2009

課題番号：18540006

研究課題名（和文） 擬似循環連分数の特殊関数による研究

研究課題名（英文） Research on Quasi-periodic continued fractions in terms of Special functions

研究代表者

小松 尚夫（KOMATSU TAKAO）

弘前大学・大学院理工学研究科・教授

研究者番号：70300556

研究成果の概要（和文）：擬似循環連分数の典型的な代表である Hurwitz 連分数と Tasoev 連分数のさらに新しい例を求めた。擬似循環連分数と、超幾何関数、双曲線関数、フィボナッチ・ゼータ関数などとの間の典型的な関係を発見した。擬似循環連分数の近似分数から Leaping convergents を定義し、その性質を調べるとともに、leaping convergents を非正規連分数、一般の整数列の場合に拡張し定義した。

研究成果の概要（英文）：Still new types of Hurwitz and Tasoev continued fractions, which belong to quasi-periodic continued fractions, have been found. Several typical relations between quasi-periodic continued fractions and hypergeometric functions, hyperbolic functions, Fibonacci-zeta functions have been discovered. Leaping convergents have been defined from the concept of convergents of quasi-periodic continued fractions. Characteristic properties of leaping convergents have been examined. Leaping convergents have been extensively defined on non-regular continued fractions and on general integer sequences.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	800,000	0	800,000
2007年度	700,000	210,000	910,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
2009年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
総計	3,000,000	660,000	3,660,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：整数論, 関数論, 組合せ論, 代数学

1. 研究開始当初の背景

(1) 2005年までの科学研究費補助金・基盤研究(C)（一般）の課題研究で、Tasoev 連分数

というまったく新しいタイプの連分数を定義し、その性質を調べてきた。その結果、Tasoev 連分数は、循環節が究極的に多項式として循環する Hurwitz 連分数に対して、循環節が究極的に指数として循環する連分数であることがわかり、部分商列が算術級数的である Hurwitz 連分数に対して、部分商列が幾何級数的であることがわかった。

(2) Hurwitz 連分数は以前から様々な研究者が扱ってきており、典型的な例としてベッセル関数の比から生じるもの、自然対数の底である e や \tan , \tanh の関数の値から生じるものなどがあつた。

(3) そこで、Hurwitz 連分数と Tasoev 連分数を対比してまとめて扱い、特に特殊関数の面からもっと大局的に構築していくことができるのではないかと考えられた。

2. 研究の目的

(1) 現在まで知られている Hurwitz 連分数や Tasoev 連分数の様々なタイプを特殊関数を用いて一般化することにより、さらに新しいタイプの Hurwitz 連分数や Tasoev 連分数を発見していく。特に本研究においては、超幾何関数、Ramanujan の q 関数、Bessel 関数、Mahler 関数などの関数による単純連分数を考察し、実数を連分数展開の観点から体系化することが目標である。特殊関数を用いることにより、個々の関数の持つ特有の性質を適用することができ、類別された連分数の性質を調べることに役立つことが期待される。

(2) 特殊関数のある種の値を連分数展開することは新しいことではないが、今までの結果は連分数の各分子の値が 1 とは限らない所謂非単純の一般連分数であつた。一般連分数はより広い表現を得られるという利点はある一方で、一つの実数値に対応する連分数展開が一意とは限らないこと、また適当に与えられた連分数展開が収束してある実数に対応するとは限らないこと、など多くの欠点がある。これ故、非単純連分数はそれに付随する性質を調べるのには適さない。そこで、今まで扱いが少なかった各分子が 1 の単純連分数に絞り、特殊関数との関連で研究を進めていく。

(3) 単純連分数でその特性を調べる中核をなすのが、近似分数である。近似分数の分母、分子はそれぞれ初期値のみ異なる同形の三項関係式をみたす。ここで注目されるのが、飛び飛びの近似分数である **Leaping convergents** という概念である。自然対数の底である e の単純連分数展開については、3 番目ごとの近似分数が e に極めて近い近似をもつことが、本研究代表者の海外研究協力者

である Carsten Elsner 氏により調べられた。さらにここで取つた **leaping convergents** は、元の近似分数と類似した面白い性質を持ち、超越数論やディオファントス方程式などへの応用をもつこともわかつた。この概念を e 以外の様々な実数や関数値に対しても適用していく。

3. 研究の方法

(1) 擬似循環連分数として知られている Hurwitz 連分数は Bessel 関数などと、Tasoev 連分数は Ramanujan の q 関数などと関連づけることにより、性質を調べ展開拡張していく。さらに Hurwitz 連分数が算術級数的、Tasoev 連分数が幾何級数的であるという特徴づけにより、比較対照できることが予想される。これにより、もっと一般の Hurwitz 連分数や Tasoev 連分数を発見したり、どちらにも属さないような新種の擬似循環連分数を定義したりしていく。

(2) 擬似循環連分数の **leaping convergents** がエレガントな形で書き表されるが、特に循環周期が 3 以上の奇数の場合に都合のよい関係式をみ出す。循環周期が偶数の場合や、循環どころか擬似循環もしない場合についても調べていく。さらに、単純連分数でない連分数でない場合への拡張、単なる整数列への拡張さえ考えられる。組合せ論的側面から研究していく。

(3) もう 1 つ期待されるのは、連分数理論の関連分野への応用である。無理数を有理数で近似するディオファントス近似理論において、この近似有理数を無理数を連分数展開したときの近似分数を使うことが知られているが、この近似分数を **leaping convergents** だけを取り出すことにより、効率よくよりよい評価をすることが期待される。

(4) 実数における通常の連分数展開を代数体に拡張することも可能であろう。Hurwitz 連分数については、 e など簡単な場合についてその代数体上の類似が知られているが、より一般の数の場合や Tasoev 連分数の代数体における類似については全く知られていない。

4. 研究成果

(1) 研究成果は、Hurwitz 連分数と Tasoev 連分数、Leaping convergents、ディオファントス近似、その他の 4 つに大別される。

(2) Hurwitz 連分数と Tasoev 連分数に関して

は、その基本的性質と事例については 2005 年度までの科学研究費補助金による研究で得られていたが、2006 年からの研究で特殊関数を考察することにより、さらに進んだ性質と、周期が今までの例より長いなどより複雑な事例が発見された。

(3) Leaping convergents に関しては著しい結果が得られた。最初は e について定義されたが、次に e のベキについて、それから連分数の擬似循環の周期の長さが 3 の場合について、周期の長さが奇数の場合について、と定義が拡張された。さらに周期の長さが偶数の場合、任意の長さの周期と一般化された。これらはすべて単純連分数の場合に限っていたが、C. Elsner 氏との共同研究で、非単純な擬似循環連分数についても leaping convergents が導入できることがわかり、さらに同氏との研究で一般の擬似循環する整数列についても leaping convergents の概念が確立された。

Leaping convergents の一連の研究成果のまとめ、およびその関連研究の総括として、Nova Publishers 社より *Advances in Mathematics Research* Vol. 9 を出版した。

(4) ディオファントス方程式や超越数との関連では、ピタゴラス三つ組をなす数によって e や \tan , \tanh などその連分数が擬似循環するような実数を近似する新しい結果が得られた。さらに、ピタゴラスの公式を一般化したディオファントス方程式をみたす数による近似へと研究が発展している。また、フィボナッチ・ゼータ関数というリーマン・ゼータ関数のフィボナッチ型の関数の値について、連分数展開や代数的独立性、超越性などの結果が得られ、さらにフィボナッチ・ゼータ関数の部分和の値に関する性質が示された。

(5) 循環連分数が二次無理数を表すことは知られているが、擬似循環連分数に含まれる多項式がすべて定数の場合が循環連分数であることを考慮すると、循環連分数における結果を拡張できる可能性がある。非単純連分数の分子がすべて一定数 N であるときを N 連分数というが、循環連分数の周期縮小における結果を擬似循環連分数の周期縮小に拡張することに成功した。

(6) 研究成果の一環として、国際研究集会「*Diophantine Analysis and related fields*」を世話人の一人として開催してきた。この研究集会は、2006 年 3 月に慶応大学（日吉）で開催されたのが最初であったが、本研

究においても継続し、2007 年 3 月に慶応大学（理工）、2008 年 3 月に同志社大学、2009 年 3 月に日本大学（理工）、2010 年 3 月に成蹊大学と毎年開催してきた。毎回海外から数名の研究者を招待し、10~20 数件の講演を行ってきた。2007 年 3 月の Richard Bumby 氏（合衆国ラトガーズ・ニューヨーク州立大）、Mary Flahive 氏（合衆国オレゴン州立大）、2008 年 3 月の Vichian Laohakosol 氏（タイ・カセツサート大）、2010 年 3 月の Georges Grekos 氏（仏サンティエヌヌ大）、Hacene Belbachir 氏（アルジェリア・ウアリブーメディエン理工科大）は本研究代表者による招へいであり、連分数や整数列などの世界的研究者である。日本側の開催協力者は、天羽雅明氏（群馬大）、岡崎龍太郎氏（同志社大）、平田典子氏（日本大）、若林功氏（成蹊大）、秋山茂樹氏（新潟大）などである。さらにこの研究集会の論文集として、慶応大学より 2006 年号を出版、American Institute of Physics 社より 2007/2008 年合併号を出版し、2010 年も American Institute of Physics 社より出版予定である。いずれの論文集でも本研究代表者は編集を務めている（2006 年号は慶応大学の中田均氏、桂田昌紀氏との共同編集）。

5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 17 件）

- ① Carsten Elsner, Takao Komatsu and Iekata Shiokawa On convergents formed from Diophantine equations, *Glasnik Mat.* 44, 267-284, 2009. 査読有
- ② Takao Komatsu, Shrinking the period length of quasi-periodic continued fractions, *J. Number Theory* 129 (2009), 358-366. 査読有
- ③ Carsten Elsner and Takao Komatsu, On the residue classes of integer sequences satisfying a linear three-term recurrence formula, *Linear Algebra Appl.* 429, 993-947, 2008. 査読有
- ④ Carsten Elsner and Takao Komatsu, On the residue classes of integer sequences satisfying a linear three-term recurrence formula, *Linear Algebra Appl.* 429, 993-947, 2008. 査読有
- ⑤ Carsten Elsner, Takao Komatsu, and Iekata Shiokawa, Approximation of

values of hyperbolic functions by restricted rationals, J. Theorie des Nombres de Bordeaux, 19, 393-404, 2007. 査読有

- ⑥ Takao Komatsu, Hurwitz continued fractions with confluent hypergeometric functions, Czech. Math. J. 57, 919-932, 2007. 査読有
- ⑦ Takao Komatsu, Continued fraction of e^2 with confluent hypergeometric functions, Liet. Mat. Rink. 46, 513-531, 2006. 査読有

[学会発表] (計 25 件)

- ① Takao Komatsu, Arithmetical properties of Fibonacci Zeta functions, JA2009 (2009年7月6日~10日) サンテティエンヌ大学 フランス
- ② Takao Komatsu, Three term recurrence relations and continued fractions, 4th Korea-Japan Workshop on Algebra and Combinatorics (2008年2月1日~2日)2008年2月2日 POSTECH 浦項 韓国
- ③ Takao Komatsu, Some combinatorial properties of leaping convergents, II, 12th International Conference on Fibonacci numbers and their applications (2006年7月17日~21日) 2006年7月19日, サンフランシスコ州立大学 合衆国

[図書] (計 4 件)

- ① Takao Komatsu, 京都大学数理解析研究所講究録 1639 「解析的整数論の新しい展開」, pp.186, 2009.
- ② Takao Komatsu 他 11 名, Advances in Mathematics Research, Volume 9, Nova Publishers, pp.345, 2009.
- ③ Takao Komatsu, Diophantine Analysis and Related Fields - DARF 2007/2008, American Institute of Physics, pp.211, 2008.
- ④ Masanori Katsurada, Takao Komatsu and Hitoshi Nakada, Diophantine Analysis and Related Fields 2006, Seminar on Mathematical Sciences No.35, Keio University, pp.221, 2006.

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :

出願年月日 :
国内外の別 :

○取得状況 (計 0 件)

名称 :
発明者 :
権利者 :
種類 :
番号 :
取得年月日 :
国内外の別 :

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小松 尚夫 (KOMATSU TAKAO)
弘前大学・大学院理工学研究科・教授
研究者番号 : 70300556

(2) 研究協力者

塩川 宇賢 (SHIOKAWA IEKATA)
慶応大学・理工学部・名誉教授
DOUGALAS BOWMAN
北イリノイ大学・数理科学科・教授 (合衆国)
CARSTEN ELSNER
ハノーヴァー応用科学大学・教授 (ドイツ)
VICHIAN LAOHAKOSOL
カセットサート大学・数学科・教授 (タイ)
CHRIS CALDWELL
テネシー大学マーチン校・数学統計学科・教授 (合衆国)