様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　21　年　5　月　22　日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2006～2008
課題番号：18540007
研究課題名（和文）　環論的不変量への代数幾何的アプローチ

研究課題名（英文）　Algebro-Geometric Approach to Invariants in Commutative Algebra

研究代表者
原　伸生（HARA NOBUO）
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：90298167

研究成果の概要：
正標数の可換環論における不変量や特異点の性質，とくに，F-純閾値，F-跳躍数や強 F-正則性などについて，代数幾何的な手法を用いて研究し，２次元正則局所環の場合の F-純閾値，F-跳躍数の振る舞いを明らかにした．また，強 F-正則性と対数的端末特異点の対応を従来の仮定 (Q-Gorenstein 性）より弱い仮定（混標数モデルにおける反標準環の有限生成性）の下で証明した．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	1,200,000	0	1,200,000
2007 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,300,000	630,000	3,930,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：代数幾何，可換環論，特異点，正標数，フロベニウス写像，F-特異点，F-純閾値，F-跳躍数

１．研究開始当初の背景
環論とくに正標数の可換環論において活発に研究されている幾つかの不変量は，代数幾何との関連性ももっていると期待されるが，環論的な手法のみでは，幾何的な意味付けが困難な状況である．

２．研究の目的
正標数の可換環論における密着閉包や F-特異点の理論と関りの深い Hilbert-Kunz 重複度やF-純閾値などの不変量を，ベクトル束や標数０の極小モデル理論に現れる特異点との関係を考慮して代数幾何的な手法を用いて研究し，これらの不変量に幾何的な解釈を与える．

３．研究の方法
正規代数多様体と因子の組の特異点の性質の尺度である F-純閾値や F-跳躍数などを，F-正則性と対数的端末特異点の対応などを考慮しつつ，次数付けのある状況下で射影多様体上のベクトル束と関連付けて研究する．

４．研究成果

(1) 基礎体 k 上の対数的端末特異点 (X,x) とその上の有効因子 D に対して，対数的標準閾値（log canonical threshold）とよばれる特異点論的な不変量が定義され，双有理代数幾何学で重要な役割を果たしている．体 k が正標数 p のとき，この概念の正標数における類似として，F-純閾値（F-pure thereshold）とよばれる正の実数 fpt_x(X,D) が定義される．D を多項式 f = f(x,y) で定義されるアフィン平面 X = Spec k[x,y] 上の因子とするとき，組 (X,D) の原点における F-純閾値は，f に付随する Monsky の関数 φ_f(t) の値がその飽和値 1 をとる最小の実数 c = c(f) に他ならない．本研究においてはこの場合に，F-純閾値 c(f)，及びその一般化である F-跳躍数（F-jumping coefficient）が有理数値をとることを，より精密な情報を含む Monsky の関数の p-フラクタルとよばれる振る舞いを用いて証明した．すなわち

定理．有限体(またはその代数閉包) k 上の２次元正則局所環 (R,m) と f ∈m に付随する F-純閾値 c(f) 及び F-跳躍数は有理数となり，F-跳躍数たちは，有理数体の離散的な部分集合をなす．

さらに, f が斉数多項式の場合に F-純閾値 c(f) と Monsky の関数φ_f(t) のさらに詳しい振る舞いについて考察し，この場合，Monsky の関数の p → ∞ で収束し，その極限が区分的多項式関数となることなどを示した．この証明においては，対応する射影直線上のベクトル束の ”syzygy gap” を用いて，Monsky の関数を評価した．
この議論を一般化して，f が重み付き斉次多項式の場合にも，重み付き多項式環 k[x,y] の Demazure 表示を用いて同様の考察を行った．その結果，この場合も斉次多項式の場合と同様に，φ_f(t) が p→∞ で区分的多項式関数に収束することなどが観察された．

(2) F-純閾値と対数的標準閾値の対応に基づいて，対数的標準特異点の最小中心の概念の『正標数版』となるべき F-純特異点の最小中心の概念を定義し，正標数の代数曲面上の随伴束の自由性などの問題への応用を試みたが，F-純中心を定義に使う「F-純」の概念が適当でなかったため，有効な結果は得られなかった．後に，K. Schwede が「鋭 F-純(sharp F-pure)」の概念を用いて F-純中心の定式化に成功している．

(3) 正標数の局所環に対し Hilbert-Kunz 重複度とよばれる，環のフロベニウス写像に関する特異点の性質を反映する不変量が定義される．非特異射影曲線上の錐特異点の局所環の Hilbert-Kunz 重複度は，その定義式に付随したベクトル束のフロベニウス引き戻しの Harder-Narasimhan (以下 HN と略す) filtration を用いて記述されるが，正標数特有の問題として，フロベニウス射による引き戻しでベクトル束の半安定が保たれないという困難がある．これに関し，非特異射影多様体上のベクトル束 E をある有限の回数(n 回とする)フロベニウス射で引き戻したものはその後何回フロベニウス射で引き戻しても HN piece の半安定性が保たれることが知られている．E の n 次フロベニウス射による引き戻しがこの性質をもつのに必要な最小の引き戻し回数ν(E)は興味深い E の不変量である. 例えば，E として種数 2 以上の非特異射影曲線上の直線束の e 次フロベニウス順像を考えると，ν(E)=e が示される．直線束の e 次フロベニウス順像は HN filtration の最大・最小傾斜の差が Shepherd-Barron により与えられた上限値をとるという顕著な性質をもつ．この性質をもつ曲線上のベクトル束 E の構造，及び，不変量ν(E)について考察を行なった．

(4) ２次元正規特異点は，その局所環の極大イデアルの標準加群による唯一の非自明な拡大が Zariski 微分加群と同型であるとき擬斉次であるという予想がある．この証明を，特異点解消の例外因子が星型の双対グラフをもつという自然な仮定をつけ，グラフの枝に対応する例外曲線を巡回商特異点につぶした曲面 X 上の例外因子 E の定義イデアルの随伴次数環の層から，X 上の E の形式的近傍の構造層への射を構成するという方針で試みたが，X が巡回商特異点をもつ場合の障害が特定されなかった．

(5) 正標数の Q-Gorenstein 特異点の F-正則性は，標数 0 の双有理代数幾何に現れる対数的端末特異点と標数 p への還元を通して対応することが知られている．
Q-Gorenstein でない F-正則特異点は容易に構成できる一方で，従来の対数的端

末特異点の定義においては特異点の Q-Gorenstein 性を仮定する必要があったが, De Fernex と Hacon は Q-Gorenstein でない特異点に対して対数的端末特異点の概念を拡張した．そこで，この一般化された対数的端末特異点と F-正則性の対応，すなわち次の予想について考察した:

予想．標数 0 の特異点が, De Fernex-Hacon の意味で対数的端末特異点であることは，その十分大きい標数 p への還元が強 F-正則であることと同値である．

この同値の必要性は比較的容易に示されるが，十分性は非 Q-Gorenstein 特異点に対しては未解決である．この十分性が，特異点の反標準環の有限生成性に関する幾分テクニカルな(しかし特異点の Q-Gorenstein 性よりは明らかに弱い)仮定の下で成り立つことを証明した．すなわち

定理．標数 0 の体上定義された特異点 (X,x) が De Fernex-Hacon の意味で対数的端末特異点をもち，さらに，(X,x) の混標数モデルの反標準環がネーター環であるとする．すると，(X,x) の局所環は強 F-正則型をもつ．

(6) 正標数の d 次元正規特異点(Y,y)の特異点解消μ:X→Y に対し, X の構造層の e 次フロベニウス直像のμ-生成的部分 A_e は一般に階数 p^{de}の O_X-加群である．(Y,y)が 2 次元有理特異点の場合には A_e は局所自由層となり，これが n 個の大域切断で生成されるとすれば，特異点解消 X から Y 上の Grassmann 多様体への Y スキームの射Φ:X→Grass_Y(p^{de},n) がひきおこされる．この射Φを用いて，Φの像と安田健彦氏により定義された F-爆発との関係について考察した．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

① N. Hara, F-pure thresholds and F-jumping exponents in dimension two, with an appendix by Paul Monsky, Mathematical Research Letters 13, 747－760 (2006), 査読有.

〔学会発表〕（計 6 件）

① 原伸生, F-特異点とその応用, 玉原代数幾何セミナー2008, 東京大学玉原国際セミナーハウス, 2008 年 8 月 11 日.

② N. Hara, Strong F-regularity vs. log ter- minal singularity in non-Q-Gorenstein case, "Commutative Algebra and its Interactions, A conference in honor of Mel Hochster," University of Michigan, USA, 2008 年 8 月 4 日.

③ 原 伸生, Bound for Frobenius destabilized semistable bundles and Harder-Narasi- mhan filtrations in characteristic p (after Langer, Shepherd-Barron et al.), 代数幾何学都留ワークショップ, 都留文科大学, 2007 年 9 月 27 日.

④ 原 伸生, Multiplier idealの標数 0 の手法と標数pの手法及びその応用II, 短期共同研究集会 "Arc Spaces and Multiplier Ideals", 京都大学数理解析研究所, 2006 年 8 月 29 日.

⑤ 原 伸生, Multiplier idealの標数 0 の手法と標数pの手法及びその応用I, 短期共同研究集会 "Arc Spaces and Multiplier Ideals", 京都大学数理解析研究所, 2006 年 8 月 28 日.

⑥ N. Hara, Characteristic p method: F-sin- gularities, ARCC Workshop “Numerical Invariants of Singularities and Higher- Dimensional Algebraic Varieties,” Ameri- can Institute of Mathematics, Palo Alto, USA, 2006 年 8 月 1 日.

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕

６．研究組織

(1)研究代表者

原　伸生 (HARA NOBUO)
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：90298167

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

石田　正典 (ISHIDA MASANORI)
東北大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：30124548

尾形　庄悦 (OGATA SHOETSU)
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：90177113

梶原　健 (KAJIWARA TAKESHI)
横浜国立大学・大学院工学研究院・准教授
研究者番号：00250663