

平成 21 年 4 月 20 日現在

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2006～2009

課題番号：18540027

研究課題名（和文）代数曲線の被覆の数論幾何 — ガロア表現・フルビッツ空間・正標数

研究課題名（英文）Arithmetic geometry of covers of algebraic curves — Galois representations, Hurwitz spaces, and positive characteristic

研究代表者

玉川 安騎男（TAMAGAWA AKIO）

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：00243105

研究分野：整数論、数論幾何学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数曲線、被覆、基本群、ガロア表現、フルビッツ空間、正標数

## 1. 研究計画の概要

研究代表者は、2005年度に3名の外国人若手研究者の訪問を受け、代数曲線の被覆の数論幾何に関連する、それぞれとの共同研究をスタートさせた。本研究課題の基本的な構想は、これらの3つの共同研究を進展させつつ、研究代表者自身のこれまでの研究の継続発展も絡ませて成果を挙げていこうというものである。より具体的な研究の目的は、以下の通りである。①ガロア表現：C. Rasmussen との共同研究の結果の改良・一般化。②フルビッツ空間：A. Cadoret との共同研究の結果の改良・応用。③正標数：M. Saidi との共同研究の結果の改良・一般化。

## 2. 研究の進捗状況

2006、2007、2008の全ての年度において、Rasmussen 氏、Cadoret 氏、Saidi 氏全員の京都滞在を実現し、代数曲線の被覆と基本群に関する数論幾何について、研究の目的を十分果たすことができた。これらの来訪のうちの一部は、本補助金の使用により実現した。より具体的には、次のような重要な研究成果を得ることができた。

① Rasmussen 氏とのガロア表現に関する共同研究について、代数体  $K$  上の  $g$  次元アーベル多様体  $A$  の同型類と素数  $l$  の組で、 $A$  の全ての  $l$  冪等分点を  $K$  に添加して得られる体が  $l$  の外で不分岐で  $l$  次元分体上副  $l$  拡大になるようなものは有限個しかないことを予想し、 $K=Q$ ,  $g=1$  の場合に証明していたが、 $K=Q$ ,  $g=2,3$  の場合、 $[K:Q]=2,3, g=1$  の場合、一般リーマン予想の仮定下での一般の場合、などにこの予想を証明できた。

② Cadoret 氏とのフルビッツ空間に関する

共同研究について、有理数体上有限生成な体上の曲線の上のアーベルスキームに対し、そのファイバーに現れるアーベル多様体の有理的な  $l$  冪ねじれ点の位数に対する上界の存在を証明、系として Fried のモジュラータワー予想の 1 次元の場合を証明できた。また、有理数体上有限生成な体上の曲線の数論的基本群の（ある種の弱い条件を満たす）1 進ガロア表現が与えられた時、その表現を曲線の（剰余次数を制限した）閉点の分解群に制限して得られるガロア表現の像に対する下界の存在を証明できた。

③ Saidi 氏との正標数に関する共同研究について、有限体上の曲線やその関数体の遠アーベル幾何に関して、素数の無限集合  $\Sigma$  である条件を満たすものに対し、幾何的基本群を最大副  $\Sigma$  商に置き換えた場合の Isom 版を証明できた。また、関連して、 $p$  進体上の曲線の遠アーベル幾何におけるセクション予想に関する結果を得た。

## 3. 現在までの達成度

①当初の計画以上に進展している。

（理由）

Rasmussen 氏との共同研究に関しては、当初の研究計画の段階では、 $K=Q, g=1$  という特殊な場合の結果という乏しい手がかりしかなかったが、その後共同研究が大きく進展し、一般の代数体上の一般のアーベル多様体を扱う枠組みを確立することができ、上記の重要な諸結果を得ることができた。Cadoret 氏との共同研究に関しては、当初の研究計画の段階では、フルビッツ空間の base 予想の解決という結果以外に手がかりがなかったが、その後共同研究が予想外に大進展し、ア

ーベル多様体の 1 冪ねじれ点の普遍上界や、更には一般の 1 進ガロア表現の像の普遍下界などの研究へと大きく発展し、1 次元モジュラータワー予想の解決を含む、上記の通り、著しい諸結果を得ることができた。Saidi 氏との共同研究に関しては、研究計画が予期せぬ方向に展開し、有限体上の曲線やその関数体の遠アーベル幾何の副  $\Sigma$  版という、この分野の 10 数年来の懸案を解決することができ、更に、 $p$  進体上の曲線に対するセクション予想という、正標数という当初の研究計画の枠組みをも超えた部分にアプローチすることができた。

#### 4. 今後の研究の推進方策

上記の通り、本研究課題の遂行は、当初の研究計画以上に進展しており、3つの共同研究をこのまま継続して推し進めていくことが、第一義的と考えている。特に、本研究課題研究期間の最終年度である本 2009 年度には、Cadoret 氏（7月～8月）、Saidi 氏（4月）の京都滞在が決まっており、彼らとの直接的な研究討論、研究打合せを基にするとともに、Rasmussen 氏も含め、電子メール等での研究討論、研究打合せも合わせて、全般的な研究を効率的に推進していきたい。更に、本年度は、これまでの研究成果のうちで雑誌論文等としてまだ発表できていない部分の発表をすることや、研究期間終了後の来年度以降への本研究計画の発展の可能性の模索など、最終年度のまとめの作業も合わせて進める予定である。

#### 5. 代表的な研究成果

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 5 件）

- ① Mohamed Saidi and Akio Tamagawa, A prime-to- $p$  version of Grothendieck's anabelian conjecture for hyperbolic curves over finite fields of characteristic  $p > 0$ , Publ. RIMS 45 (2009), no. 1, 135-186, 査読有.
- ② Anna Cadoret and Akio Tamagawa, Stratification of Hurwitz spaces by closed modular subvarieties, Pure and Applied Mathematics Quarterly 5 (2009), no. 1, 227-253, 査読有.
- ③ Christopher Rasmussen and Akio Tamagawa, A finiteness conjecture on abelian varieties with constrained prime power torsion, Mathematical Research Letters 15 (2008), no. 6, 1223-1231, 査読有.
- ④ Shinichi Mochizuki and Akio Tamagawa, The algebraic and anabelian

geometry of configuration spaces, Hokkaido Mathematical Journal 37 (2008), no. 1, 75-131, 査読有.

- ⑤ Minhyong Kim and Akio Tamagawa, The 1-component of the unipotent Albanese map, Mathematische Annalen 340 (2008), no. 1, 223-235, 査読有.

〔学会発表〕（計 3 件）

- ① 玉川安騎男, Torsion of abelian schemes and rational points on moduli spaces (Anna Cadoret 氏との共同研究), RIMS 研究集会「代数的整数論とその周辺」, 2007年12月10日.
- ② Akio Tamagawa, Recent progress in anabelian geometry, 研究集会 ``Asian Conference on Arithmetic Geometry'', KIAS, Seoul, 2007年9月15日--18日 (全4回).
- ③ Akio Tamagawa, The algebraic and anabelian geometry of configuration spaces (joint work with Shinichi Mochizuki), RIMS 研究集会「Arithmetic Galois Theory and Related Moduli Spaces」, 京都大学数理解析研究所, 2006年10月27日.

〔その他〕

ホームページ

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ja/list/tamagawa.html>