

平成 22 年 6 月 7 日現在

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2006～2009

課題番号：18540048

研究課題名 (和文) 非可換なガロア群を持つ代数体の拡大の計算的研究

研究課題名 (英文) A computational study on extensions of algebraic number fields with non-commutative Galois groups

研究代表者

角皆 宏 (TSUNOGAI HIROSHI)

上智大学・理工学部・准教授

研究者番号：20267412

研究成果の概要 (和文) : ガロア理論とは一言で言えば数の対称性の理論であり、中でも構成的ガロア理論は、狙った対称性を具体的明示的に作ることを主眼とする研究である。特に本研究課題では、非可換な対称性(ガロア群)を持つ場合を取り扱い、幾何的な対称性を利用する手法を中心として、主に 5 次・6 次の多項式に関わる場合に対し、様々な特色ある対称性を持つ多項式を具体的に構成した。得られた多項式が簡潔な表示を持つことも意味があり、それにより幾らかの数論的性質も明らかにすることが出来た。

研究成果の概要 (英文) : Galois Theory is, shortly speaking, a theory of symmetry of numbers. Constructive Galois Theory aims at constructing prescribed symmetry explicitly. In this research, we have treated some cases with non-commutative Galois groups, and constructed explicit polynomials (mainly of degree 5 and 6) with featuring symmetry making use of geometric symmetry. It is significant that the polynomials have brief presentation so that we have obtained some number-theoretic properties.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	1,100,000	0	1,100,000
2007 年度	700,000	210,000	910,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
2009 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
総計	3,500,000	720,000	4,220,000

研究分野：整数論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：整数論・代数学・ガロア理論・アルゴリズム

## 1. 研究開始当初の背景

代数的整数論において、与えられた代数体と与えられた有限群に対し、その群をガロア群を持つ拡大体を統制することは、最も基本的な問題の一つであり、アーベル群に対する場合は「類体論」として包括的な理論が確立されているが、非可換群に対しては

未だに満足できる包括的な一般論があるとは言えない。有理数体の場合でも、「任意の有限群に対し、それをガロア群を持つ拡大体が存在するか」という「ガロアの逆問題」すら、一般には解決していない。これは、非可換有限群が個別に多彩な性質を持って

いることの現れでもあり、本質的に個別な議論を必要とする部分が多い。従って、なお実験的な観察・研究も意義が大きいと考えられるが、一般論はあっても明示的な計算が困難であったり、逆に、個別の計算例はあっても理論化が難しかったりする場合が多い。

## 2. 研究の目的

本研究の全体構想としては、このように豊富な世界を持ちながら今なお未知な所の多い、非可換群をガロア群に持つ拡大について、主に明示的な例の構成や実験的な計算を通じて、様々な方面から具体的な知見を得ることである。特に、5次以上の幾つかの交代群や7元体上2次の射影特殊線型群など、位数の小さい非可解群の場合を目標となる中心的な課題として、次のような問題に取り組む。

- ・複比型ネーター問題
- ・簡潔な係数を持つ生成的多項式の構成
- ・生成的多項式の整数環上の性質の探求
- ・生成的多項式を用いた代数体の単数の構成

## 3. 研究の方法

(1) ガロア群の構成の手法としては、主にネーターの問題およびその変種に関連する方法を取った。目標となる有限群に対し、多変数の有理関数体に適切に作用を定め、その固定体が有理的であれば、その有限群をガロア群とする有理関数体上の拡大が得られる。有理性の判定はしばしば困難であり、反例もあるが、成功すればパラメタ付きの構成となる他、置換作用やその変形の場合には生成的多項式が得られ、簡潔な係数の多項式が得られることも多い。このことは、同じ分解体を与えるパラメタを決定する同型問題や、素数の分解法則など整数環上の考察に取り組む上で重要である。また、グロタンディエックデッサンなどの被覆を通じた構成・考察も密接に関連する。

(2) 研究の形態は主に個別研究であるが、本研究に参画の研究者をはじめとする研究グループで小規模なセミナーを随時行ったり、国内外の研究集会に参加して、情報交換や議論を行なって研究を深めた。個別研究では、計算機による数式処理を用いた計算も多く行なったのが特徴である。

## 4. 研究成果

(1) 6次の複比型ネーター問題については、橋本喜一郎氏(早稲田大学)とも共同研究を行ない、可解な可移部分群の場合(12種類)

については肯定的に解決したが、非可解部分群の場合は困難で結果を得るには至らなかった。そのため、当初目標としていた7次の場合には進めなかった。

(2) 複比型ネーター問題と置換ネーター問題とを結び付けるのに重要な、置換群の固定体の間への相対的有理性の降下の問題について、標数が0のとき、奇数次の場合には全ての場合に肯定的なことを示し、これにより、複比型ネーター問題が肯定的なら置換ネーター問題も肯定的であることが判った。一方、偶数次対称群の場合には複比の体と差の比の体との間の相対的有理性が固定体の間に降下しないこと、6次および2冪次の場合には、全ての可移部分群について同様であることを示した。

(3) 5次多項式に関する場合は、非自明でありながら計算が可能な部分もあり、興味深い対象と言える。5次二面体群や5交代群をガロア群とし、定数項が $\pm 1$ で各係数が助変数の整係数多項式である単多項式(単数を根とする多項式)の族の構成については、部分的な結果を得た所であるが、代数的整数論において単数の具体的構成は重要な問題であり、具体例の提供を含めた応用が見込まれるので、今後の進展に向けて引続き取り組んでいる。

(4) 正種数のGrothendieck dessinの研究では、種数1で5次以下の全ての場合、6次で1点が完全分岐する全ての場合とその他の幾つかの場合、7次で2点が完全分岐する全ての場合に、曲線とBelyi射の方程式を計算し、ガロア軌道の決定やグラフとの対応付けを行なった。残った場合についても計算・考察を進めている。

(5) 絶対ガロア群のGrothendieck-Teichmüllerパラメータの観点からは、中村博昭氏(岡山大学)・安田正大氏(京都大学)とも共同研究を行ない、古典的な方程式論で重要な4次多項式の3次分解式(Ferrariの分解式)を現代的な立場から見直して、新たな形の関係式を得た。この考えを進めて、5次多項式の6次分解式(Cayley-Weberの分解式)について、類似の議論を試みたが、困難な点が多くあることが分かり、今後の課題となっている。

(6) 連携研究者・研究協力者を中心として進めた部分では、星氏が、幾つかの生成的多項式の同型問題及び(共通)部分体問題・同型問題に付随するThue方程式族とその整数解などについて進展を得た。陸名氏は、5次二面体群をガロア群とする多項式族に対するBrumer化の手法を応用して、この場合の生成的多項式の同型問題や、古典的な

Klein 等の結果に較べて遥かに簡潔な「根の公式」の明示的な記述を得た。また、星・陸名両氏は、3次元の単項的作用による固定体の有理性に関して、未解決のまま残っていた場合を解決した。小松氏は、或る種の生成的巡回多項式の分解体での素数の分解法則を記述した他、生成的多項式の数論に関する研究で得られた技術を活用して、アンシエーションスキーム理論や結び目理論など、他分野における重要な多項式の数論的性質を明らかにした。また、1の冪根を含まない場合への Kummer 理論の拡張を整備し、引続きガロア群が非可換な場合への拡張を試みた。梅垣氏は、有限体上の種数2の曲線の同型類について研究を進めており、5次式・6次式の数論との関連が期待される。都築・森山両氏は保型形式側から研究を行なっているが、ガロア理論側の準備が進まず、これらの問題との具体的連携には至っていない。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 18 件)

1. Hiroaki Nakamura, Hiroshi Tsunogai, Seidai Yasuda, “Harmonic and equianharmonic equations in the Grothendieck-Teichmüller group, III”, Inst. Math. Jussieu, vol.9 (2010), 431--448, 査読有.
2. Akinari Hoshi, Katsuya Miyake, “On the field intersection problem of quartic generic polynomials via formal Tschirnhausen transformation”, Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli 58 (2009), 51-86, 査読有.
3. Toru Komatsu, “Construction of cyclic number fields with prime degree and their Frobenius automorphisms”, RIMS Kokyuroku Bessatsu B12 (2009), 223--230, 査読有.
4. Akinari Hoshi, Yuichi Rikuna, “Rationality problem of three-dimensional purely monomial group actions: the last case”, Math. Comp. 77 (2008), no. 263, 1823--1829, 査読有.
5. Toru Komatsu, “Cyclic cubic field with explicit Artin symbols”, Tokyo Journal of Mathematics 30 (2007), 169--178, 査読有.

[学会発表] (計 46 件)

1. 角皆宏, 「Noether 問題の紹介と、それに関連する体拡大の有理性問題について」, 北

陸数論研究集会, 2009年12月25日(金沢大学サテライトプラザ).

2. 星明考, “On the simplest quartic fields and related Thue equations”, The Joint Conference of ASCM2009 and MACIS2009, 2009年12月16日(JALリゾートシーホークホテル福岡).

3. 橋本喜一郎, 角皆宏, 「6次可移置換群のネーター問題: 最近の進展とその背景(III)」, 研究集会「Galois理論とその周辺・徳島2008」, 2008年9月12日(徳島大学).

4. 星明考, “On the field intersection problem of generic polynomials via resolvent polynomials”, Foundations of Computational Mathematics (FoCM'08) WORKSHOP C4 Computational number theory, 2008年6月24日(香港城市大学).

5. 梅垣敦紀, “On the Moduli of Genus 2 Curves over Finite Fields”, 2008 NCTS Number Theory Day: Arithmetic of Curves, 2008年12月18日(台湾 国立清華大学).

6. 小松亨, “Generic polynomials and their arithmetic properties”, COE Conference on the Development of Dynamic Mathematics with High Functionality, 2007年10月4日(福岡リーセントホテル).

7. 小松亨, 「グロタンディックのデッサンのグラフ構造を決定するアルゴリズムについて」, 備前冬季数学祭典 2007, 2007年12月15日(岡山大学).

8. 陸名雄一, 「パラメーター付き多項式と同型問題について」, 福岡数論研究集会, 2007年8月29日(九州大学).

9. 橋本喜一郎, 角皆宏, 「6次可移置換群のネーター問題: 現状とその背景(I)(II)」, 研究集会「ガロア理論とその周辺」, 2007年11月4日(山形大学).

10. 陸名雄一, 「生成的多項式の変換問題について」, 室蘭数論研究集会, 2006年10月28日, 室蘭工業大学.

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

角皆宏 (TSUNOGAI HIROSHI)  
上智大学・理工学部・准教授  
研究者番号: 20267412

##### (2) 研究分担者

都築 正男 (TSUZUKI MASAO)  
上智大学・理工学部・准教授  
研究者番号: 80296946  
梅垣 敦紀 (UMEGAKI ATSUKI)  
早稲田大学・高等研究所・准教授  
研究者番号: 60329109

(H18・19のみ)

(H20・21は連携研究者)

森山 知則(MORIYAMA TOMONORI)

大阪大学・理学研究科・准教授

研究者番号：80384171

(H18のみ)

(H20・21は連携研究者)

陸名 雄一(RIKUNA YUICHI)

早稲田大学・理工学部・講師

研究者番号：10434309

(H18・19のみ)

(H20は連携研究者・H21は研究協力者)

星 明考(HOSHI AKINARI)

立教大学・理学部・助教

研究者番号：50434262

(H18・19のみ)

(H20・21は連携研究者)

小松 亨 (KOMATSU TOORU)

東京理科大学・理工学部・講師

研究者番号：10403974

(H19のみ)

(H20・21は研究協力者)

(3)連携研究者

( )

研究者番号：