

平成 22 年 6 月 18 日現在

研究種目：基盤研究（C）（一般）

研究期間：2006～2009

課題番号：18540049

研究課題名（和文）グリーン関数による相対跡公式の研究

研究課題名（英文） Green functions and relative trace formulas

研究代表者 都築正男（Tsuzuki Masao）
上智大学・理工学部・准教授

研究者番号：80296946

研究成果の概要（和文）：不定符号ユニタリー群に対して、それを定義するエルミート形式付空間における非等方軌道として実現される簡約可能対称空間のプランシェレル測度が、総実代数体上の有理構造に由来する余コンパクト合同部分群によるユニタリー群の算術的離散商上の保型形式の、イソトロピー部分群の軌道に沿った周期積分の2乗ノルム平均値で近似されることを証明した。また、実双曲空間における同様の構成によって定義される、ラプラス固有形式の周期積分の2乗ノルム平均分布関数に対する漸近公式（ワイル法則の類似）を定式化し証明した。

研究成果の概要（英文）：

We develop a version of relative trace formula for symmetric spaces associated with indefinite unitary groups of arbitrary real rank and for orthogonal groups of real rank one. As an application, we prove two kinds of asymptotic formulas ; (1) It is proved that the Plancherel formula of the symmetric space for unitary group is approximated by certain sequence of discrete measures arising from the average of square norm of period integrals of automorphic forms on an arithmetic quotient of the unitary group. (2) We showed an asymptotic formula for certain average of period integrals of L^2 -normalized Laplace eigenfunctions on an arithmetic quotient of rank one orthogonal group; the formula should be regarded as an analogue of Weyl's law for spectral counting function for multiplicity of Laplace eigenvalues.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	900000	0	900000
2007年度	800000	240000	1040000
2008年度	800000	240000	1040000
2009年度	800000	240000	1040000
年度			
総計	3300000	720000	4020000

研究分野：数論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：グリーン関数、相対跡公式、一般超幾何級数、エル関数

1. 研究開始当初の背景

幾何学的保型形式の興味深い例である古典型対称領域の数論的算術商の「特殊サイクル」のポワンカレ双対形式の明示的構成と数論的研究は70年代以降、テータ級数との関連で活発に行われてきた。また、数論曲面上の算術的交点理論の一つの成果であるGross-Zagierの仕事において、算術交点形式のアルキメデス成分を記述するためにリーマン面の双曲ラプリアンに対するレゾルベント（グリーン関数）が重要であった。本研究の前段階として織田・都築は、高次元の数論的多様体上の算術交叉理論のアルキメデス成分として重要な役割を担うと考えられる、特殊サイクルに付随するグリーンカレントとポワンカレ双対形式の一つの自然な構成法を提示していた。このカレントの注目すべき性質として、ラプラス作用素の固有関数系によるスペクトル展開が、固有関数達の特殊サイクルに沿った周期積分によってきわめて具体的に求められる点が挙げられる。さて、このようにスペクトル展開が保型形式の適当な特殊値（あるいは周期積分）で記述される核関数としては、前述したリーマン面の場合のレゾルベントが古典的には知られていた。

Iwaniec の著作で詳述されているように、この関数の明示的なスペクトル展開と、リーマン面のカスプにおけるフーリエ展開の具体的計算によって、Kuznietsov-Bruggeman の公式を導出することができる。この公式は、今や、ラプラス作用素の固有関数（保型形式）のフーリエ展開係数や保型L関数の特殊値のスペクトル平均を調べるための基本手段となっている。

Kuznietsov-Bruggeman の公式は、保型表現の持ち上げを保型形式の周期積分に注目して確立する目的でJacquetが導入した相対跡公式の特別な場合である、と見なすことができる。

このような状況を背景・動機付けとして、高次元の対称空間の算術的離散商の特殊サイクルに付随するグリーン関数を通して、相対跡公式の一つの実現と応用を目指して、本研究は開始された。

2. 研究の目的

研究の目的は、古典的なレゾルベント関数のスペクトル展開とフーリエ展開を計算して相対跡公式の明示型を導く方法を、高次元の場合に拡張し、その数論的・幾何的応用を目指すことであった。Herve Jacquet 氏の提唱

する相対跡公式は、いくつかの困難な予想を克服した暁には保型形式の持ち上げ、L関数の特殊値と保型形式の周期の研究に広範かつ強力な方法論をもたらし、一定の成果を約束するものである。その証明と運用に当たっては、その原型の一つであるArthur-Selbergの跡公式の方法を踏襲するのが相対跡公式研究の主流を占めている。この方法は完成すれば一般的で汎用性の面で優れているが、いかにせん、証明は多くのステップを必要とし完成は容易でない。一方、相対跡公式は、先駆的な研究であるKuznietsov-Bruggemanの公式を特殊ケースとして包摂する。この特殊ケースは古典的グリーン関数のフーリエ展開と深い関係があり、汎用性の面では劣るものの証明の見通しはよい。本研究の目的は、この利点を生かしつつ高次元の数論多様体の幾何的保型形式や実解析波動形式に通用する相対跡公式の一つの実現を、適用範囲は限定的ではあるが理論上の作業仮説を何ら置くことなしに、証明し活用することにあつたともいえる。

3. 研究の方法

まず、高次元の数論多様体の特殊サイクルに対するグリーンカレントを構成する。これには、普遍被覆（対称空間）で同変的ベクトル束の切断に作用するラプラス作用素に対してグリーン関数を構成し、それを基本群に渡って「平均化」という方法が自然で有効である。（この部分は研究開始時点で、すでに、織田・都築によって原理的には解決されていた。）

次に、こうして作られた「保型グリーンカレント」のフーリエ展開係数、或いは、特殊サイクルに沿った周期積分などを計算する。

最後に、無限遠における適当な減衰条件を満たすテスト関数を重みとして保型グリーンカレントのスペクトルパラメーターに関して平滑化を行い、和公式（相対跡公式）を導出する。（Iwaniecの著作において詳述されている方法の移植である。）

4. 研究成果

当初の予定とは若干異なる経緯をたどったものの、一般のユニタリー群と分裂階数1の直交群上で、行列サイズをひとつ減じた同種

の部分群に由来する特殊サイクルに沿った保型形式の周期積分の2乗ノルムをスペクトル展開に包摂するような相対跡公式を構成することができた。その応用として、次に詳述する2つのタイプの漸近公式を定式化し、証明することができた。

(1)

代数体上で定義された半単純(簡約)代数群 H とその有理的対合の固定部分群 H を考えよう。 G の数論的不連続部分群が与えられたとき、その指数有限の正規部分群からなる減少列で単位元に収縮していくものは、 G 及び H に付随する対称空間 $M(G), M(H)$ の離散商へ移行することで、リーマン多様体とその部分多様体の組の被覆列(塔)を定める。以下では、 $M(G)$ から生じる多様体がコンパクトになるものと仮定する。 $M(G)$ の同変的ベクトル束を固定すると、商への移行によってそれらの被覆多様体上にベクトル束が誘導される。被覆多様体の一つにおいて、そのベクトル束の滑らかな切断のうち、 G/H のあらかじめ決められた離散系列表現を生成するようなものの空間を考えるとそれは、 $M(G)$ の不変リーマン計量から決まる内積によって有限次元ヒルベルト空間になる。この空間の各函数に対して、 H の定める部分多様体に沿った周期積分を対応させる写像を線型形式と見て、そのノルムを考えよう。このノルムを、被覆多様体を決める離散群の函数(以下2乗ノルム平均函数と呼ぶ)と見なし、離散群を所与の塔に沿って単位元に収縮させたときの漸近挙動を問題にする。

G としてユニタリー群、 H としてサイズが一つ小さな部分ユニタリー群をとり、離散群の塔として、総実代数体の適当な分数イデアルの増大列から決まる主合同部分群の列を取った場合を相対跡公式を利用して調べ、2乗ノルム平均函数の漸近挙動の主要項を決定した。特に、所与の G/H の離散系列表現が可積分表現にならない場合は、2乗ノルム平均函数が、 H の定める部分多様体のポワンカレ双対形式の2乗ノルムと本質的に同じになるケースを含み、幾何学的にも興味深いと思われる。この結果は *J. Funct. Ann.* 255 (5) (2008), 1139-1190 として出版された。

(2)

(1) と同様の設定で、今度は離散群をひとつ固定し、 $M(G), M(H)$ の離散商を考える。ただし、今度は $M(G)$ において非コンパクトな基本領域を持つケースも考える。 $M(G)$ の不変リーマン計量から決まるラプラス作用素の完全正規固有関数系を固定する。与えられた正の数 x を超えない固有値をもつ

固有関数の $M(H)$ の離散商に沿った「周期積分」の2乗総和を考える。これを x の関数と見なし、 x を無限に大きくしたときの漸近挙動を問題にしよう。

G が実階数1の直交群、 H としてサイズが1小さな実階数1の部分直交群をとった場合に関して、漸近展開の主要項を明示的に決定した。

特に、基礎体を有理数体、 G が(射影化した)2次特殊線形群に同型になる場合には、 $M(G)$ はポワンカレ上半平面、 $M(H)$ は2次実無理数とその共役を結ぶ上半平面内でつなぐ測地線になる。 $M(G)$ の離散商は、リーマン面になり、 $M(H)$ はその中の単純閉測地線の不変被覆となる。ラプラス固有関数の周期積分は(少なくとも2次無理数が類数1の実2次体の極大整環を生成する場合には)対応する保型 L 函数の関数等式中心での値で表示され(Waldspurger型公式)上の漸近公式からは、このような特殊値の無限個の非消滅が従う。これらの結果の(一部は) *J. Number Theory*, 129 (2009), 2287-2438 として出版された。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 7 件)

①Masao Tsuzuki, (査読有)

“Spectral square means for period integrals of wave functions on real hyperbolic spaces”, *J. Number Theory*, 129 (2009), 2287--2438

②Masao Tsuzuki, (査読有)

“Certain Rankin-Selberg integrals for Unitary Groups”, *Tohoku Math. J.* 61(2009), 115--164.

③Tomonori Moriyama, (査読有)

“L-functions for $GS(2) \times GL(2)$: archimedean theory and applications”, *Canad. J. Math.* 61 (2009), 395-426

④Masao Tsuzuki, (査読有)

“Limit formulas of period integrals for a certain symmetric pair”, *J. Funct. Ann.* 255 (5) (2008), 1139--1190

⑤Yasushi Gomi, (査読有)

“The Markov traces and the Fourier transforms”, *J. Algebra*, 303 (2) (2006), 566-591

[学会発表] (計 6 件)

①Masao Tsuzuki,

“Spectral square means for central values of L-functions on $SL_2(\mathbb{Z})$ ”

International conference “Geometry and analysis of automorphic forms of several variables”, (東京大学数理科学研究科、2009年9月17日)

②Masao Tsuzuki,

“Limit period formulas for special cycles on real hyperbolic spaces”, (数理解析研究所, 2009年1月20日)

③Masao Tsuzuki,

“Spectral square means for period integrals of wave functions on real hyperbolic spaces”, Summer school on spectral theory of automorphic forms, (at Pstech, Pohan. August, 2008)

④Masao Tsuzuki,

“SPECTRAL SQUARE MEANS FOR PERIOD INTEGRALS OF WAVE FUNCTIONS”, (数理解析研究所, 2008年1月21日)

⑤Masao Tsuzuki,

{Spectral zeta functions and spectral square means of periods of wave functions”

(The 10-th autumn workshop on number theory, at Hakuba, November 24, 2007)

⑥都築正男、

「 $SL_2(\mathbb{Z})$ 上の Maass 波動形式の閉測地線に沿った周期積分に付随するスペクトル型ゼータ関数について」(福岡整数論研究集会、九州大学2007年8月29日)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

都築 正男 (Masao Tsuzuki)

上智大学・理工学部・准教授

研究者番号：80296946

(2) 研究分担者

五味 靖 (Yasushi Gomi)

上智大学・理工学部・講師

研究者番号：50276515

(3) 研究分担者 (H. 18 - H. 19)

連携研究者 (H. 20 - H. 21)

森山知則 (Tomonori Moriyama)

大阪大学・理学研究科・准教授

研究者番号：80384171