様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年　３月　31 日現在

研究種目：　基盤研究（C）
研究期間：　2006～2009
課題番号：　18540064
研究課題名（和文）　リー群のホモトピー的性質の研究

研究課題名（英文）　Research on homotopical properties of Lie groups

研究代表者
大嶋　秀明（ OSHIMA HIDEAKI ）
茨城大学・理学部・教授
研究者番号：　70047372

研究成果の概要（和文）：リー群Gに対し，GからGへの単位元を動かさない連続写像の全体からなる位相空間のホモトピー群を主に研究した．0 次のホモトピー群のべき零指数はGに応じていくらでも大きくなり得ることを示した．Gが階数２の古典群 SU(3), Sp(2)の場合に，11 以下の n に対し n 次ホモトピー群を完全に決定した．４次の回転群 SO(4)のホモトピー同値自己写像のホモトピー類群の典型的な商群の構造をほとんど完全に決定した．

研究成果の概要（英文）：For a Lie group G, I studied on homotopy groups of the function space of self maps of G. I proved that for any natural number n there exists G of which the nilpotency class of the 0-th homotopy group is greater than n. When G is SU(3) or Sp(2), I and coauthers determined the n-th homotopy group of the function space for 0<n<12. I calculated a quotient group of the group of homotopy classes of self homotopy equivalences of SO(4).

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	900,000	0	900,000
2007 年度	800,000	240,000	1040,000
2008 年度	800,000	240,000	1040,000
2009 年度	800,000	240,000	1040,000
年度			
総　計	3,300,000	720,000	4,020,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：リー群，ホモトピー，ホモトピー群，べき零指数，自己写像，写像空間

１．研究開始当初の背景

(1) 日，米，欧の多くの研究者により種々の不変量が導入され，ソフトホモトピーと称する一般論が盛んに展開されつつあった．その１つに Cornea, Felix, Lemaire, Murillo 等による有理化の手法があり，良い結果が多数得られていた．しかし我々の立場からすると，有理化によっては余りに多くの情報が失われてしまう．そこで有理化によって得られた結果を活用しつつ，有理化せずに，生の幾何的情報・手段を用いて研究することが求められていた．Lusternik-Schnirelmann のカテゴリーと呼ばれる空間の位相不変量についても有理化の手法を用いて多くの結果が得

られていた．しかしそこに扱われた空間は有理化されていたため，いま一つ訴えるものが弱かった．ここに，岩瀬により，有理化を用いずに Ganea 予想への反例が与えられたことは特筆すべき出来ごとであった．彼の手法はホモトピー論の王道とも呼ぶべきものであり，古くからの遺産を確かに継承していた．
(2) その難しさゆえに遅々として進まなかったホモトピー集合[X,X]の研究も，Arkowitz, 丸山，Strom, Stanley らにより，ホモトピー群の零準同型を誘導するホモトピー類全体のなす半群や，ホモトピー群の恒等準同型を誘導するホモトピー類全体のなす半群が研究され，その構造が徐徐に明らかになってきた．
(3) X の自己ホモトピー同値写像のホモトピー類からなる[X,X]の部分集合 E(X)の研究が歴史を重ねていた．Arkowitz, Lupton, 丸山，Rutter, 沢下，簗山その他により盛んに研究されたのは E(X)が群となることが最大の理由であった．ごく特殊な場合として，山口が E(SO(4))についておおまかな構造を決めていた．
(4) E(X)の典型的な部分群の一般的な性質について Arkowitz, Strom, 丸山が研究を行っていた．ホモトピー群の恒等写像を誘導する元全体からなる部分群 $E_{\#}(X)$ は Dror-Zabrodsky によればべき零である．それ以外にべき零な部分群は，典型的な空間に対してさえ，ほとんど知られていなかった．

２．研究の目的
(1) リー群 G から G へのホモトピー同値写像類群 E(G)の解析．E(G)の典型的な部分群 $E_{\#}(G)$による商群 E(G)/ $E_{\#}(G)$の解析．特に，E(SO(4))/ $E_{\#}$(SO(4))の決定．
(2) 群 H(G)=[G,G]の解析．特に予想「G が単純リーならば群[G,G]のべき零指数は G の階数以上」の証明．
(3) リー群の圏から群の圏への関手 E, H その他の単射性または全射性の研究．
(4) リー群 G の型を$(n_1,n_2,\ldots,n_r)$としたとき，n_i次元球面$(i=1,2,\ldots,r)$の積空間 S から G への典型写像が，どの奇素数 p で局所化したらホモトピーの意味で準同型となるかの決定．
(5) どの単純リー群 G に対し E(G)がべき零であるかの決定．

３．研究の方法
(1) 2 つの写像がホモトピックでないことを，それが以下の群に誘導する準同型が同じではないことを示すことにより行う：ホモロジー群，一般コホモロジー環．ホモトピー群．これが有効であるためには 3 種の群構造を完全ではなくともある程度知る必要がある．特にホモトピー群については既知の膨大な情報から有益な部分を抽出することが重要である．
(2) ホモトピー集合[X,Y]の計算を行う際に有効な道具は fibration に付随する完全系列と cofibration に付随する Puppe の完全系列である．前者は下記５論文 4 で有効に使われた．後者は X が複体の場合に適用されるものであるが，[X,Y]が群にならない場合は難しいが X が co-H-group の場合は Puppe 完全系列が群の完全系列となるため，[X,Y]を中央に持つ短完全系列が得られる．この拡大の決定は一般には難しいが，戸田ブラケットが有効に働き，決定できる場合もある．下記５の論文 2,4 はその例である．
(3) X=Y の場合は[X,X]が半群となるため，その演算を手掛かりに情報を得ることがある．下記５(5)で説明するように，成功することがある．
(4) X が有限複体であって co-H-group または H-group の場合には，[X,X]は群となり，Puppe 完全系列が群の完全系列となる．これから[X,X]を中央に持つ短完全系列が得られる．この拡大の決定は一般には難しいが，(2)で述べた方法が成功する場合がある．
(4) 扱う対象が可換群である場合，素数 p 毎に局所化して論じ，後にそれらを合わせて可換群の情報を得る．

４．研究成果
上記２．研究の目的項の (3),(4)については成果がなかったが，(1),(2),(5)については あった．下記５〔雑誌論文〕に挙げた順に説明する．
(1) 主結果：H をホモトピーべき零でない位相群とし，n を自然数とし，X を n 個の H の積位相群とするとき，群[X,X]のべき零指数は[H,H]のべき零指数と n 以上である．こうして，一般には位相群 G に対する群[G,G]のべき零指数の下限はいくらでも大きくなり得ることがいえた．上限としては，半世紀前に G. Whitehead により G の Lusternik-Schnirelmann カテゴリーが知られていた．しかし下限については一般的な結果は知られていなかった．この意味で画期的な結果といえる．実際の計算例は，階数の小さな場合には研究代表者が過去 10 数年の間に相当数行ったし，射影的ユニタリー群 PU(n)の場合は最近濱中・河野が行った．単純リー群に限っても，殆どが計算の手段が見つかっていない．せめて研究代表者が 10 年前に提出した予想「G が単純リー群ならば群[G,G]のべき零指数は G の階数以上である」の正否解決が望まれる．
(2) G を SU(3)または Sp(2)という階数 2 の古典群とし，map(G,G)を G から G への単位元を動かさない連続写像全体のなす位相空間とする．主結果において map(G,G)

のn次ホモトピー群のうち，n=9, 10, 11の場合を完全に決定した．例えば，Sp(2)でn=9の場合は位数2の巡回群6個の直輪である． n=0 の場合は研究代表者が1999年に決定し，0<n<9の場合は下記(4)における丸山との共同研究で決定した．これら研究の意義については(4)で述べる．

(3) 山口は2000年に1970年のSieradskiの計算を用いて商群$E(SO(4))/E_\#(SO(4))$は特殊な2次実行列群と同型であることを示した．本論文の主結果は，この行列群の詳しい構造を述べたものである．それによればこの行列群はべき零ではなく，3個の元で生成され，その基本関係式も分かっている．したがって$E(SO(4))$はべき零ではない．また，応用として商群の元の位数は 1,2,4,無限大のいずれかであることが分かった．$E_\#(SO(4))$は研究代表者により 2005 年に決定されているので，本論文と合わせれば$E(SO(4))$の構造は大分見えてきたことになるが，未だ完全には判明していない．これからの課題は不完全な部分を払しょくすることである．

(4) 丸山と共同で行った本研究の結果を述べよう．G を階数 2 の古典群 SU(3)またはSp(2)としたときmap(G,G)のn次ホモトピー群を0<n<9の場合に決定し，階数2の例外リー群G_2の場合はmap(G,G)の基本群を決定した．いずれの場合も研究代表者が0次ホモトピー群を既に決定していたものである．本論文の結果はDidierjeanの1992年の結果の拡張となっているが，手法はまったく異なる．本論文の結果をゲージ理論に適用は可能である．また，ホモトピー論において主研究対象の一つであるモノイド aut(G)，G の単位元を動かさない自己ホモトピー同値写像全体からなるモノイド，のホモトピー群を記述していることから，本論文の意義の一端がうかがえよう．

(5) 基点付き空間Xに対し，ホモトピー集合[X,X]の幾つかの部分集合を考えた．まず2種の部分半群：[X,X]の元で n 次以下のホモトピー群の零準同型を誘導するもの全体を$Z_{\#n}(X)$と書き，そのループが自明写像のホモトピー類となるもの全体を$Z_\Omega(X)$と書く．E(X)の2種の部分群を考える：n 次以下のホモトピー群の恒等写像を誘導するもの全体からなる部分群を$E_{\#n}(X)$と書き，そのループがΩXの恒等写像のホモトピー類となるもの全体を$E_\Omega(X)$と書く．すると次の包含関係が成り立つ：

$$Z_\Omega(X) \subset Z_{\#\infty}(X) \subset Z_{\#n}(X),$$
$$E_\Omega(X) \subset E_{\#\infty}(X) \subset E_{\#n}(X).$$

これら包含関係⊂が等号=でない例があるか否かについては既に多くの結果がArkowitz, Stanley, 丸山その他により得られていた．本論文においてn次元有限複体Xで$Z_{\#\infty}(X) \subset Z_{\#n}(X)$が等号でないものが存在することを示した．他に多数の結果を得ている．例えばXが球面，実-，複素-または四元数-射影空間など有限個の積空間の場合，N を因子空間の次元の最大値プラス3とすると

$$Z_\Omega(X)=Z_{\#\infty}(X)=Z_{\#N}(X),$$
$$E_\Omega(X)=E_{\#\infty}(X)=E_{\#N}(X).$$

連結リー群Gに対し以下は同値である：
(5-1) $Z_\Omega(G)=0$,
(5-2) $E_\Omega(G)=1$,
(5-3) $Z_{\#\infty}(G)=0$,
(5-4) $E_{\#\infty}(G)=1$,
(5-5) [G,G]で左分配則が成り立つ，
(5-6) Gはトーラス，3次元球面，SO(3)のどれかに同型，
(5-7) [G,G]は可換であるが，3次元球面と1次元球面1または2個の積と同型ではない．

Gが階数2のリー群の場合，上記6種類の群を決定した．本論文によって半群[X,X]と群 E(X)について相当の情報が得られたが，新たな疑問も現れてきたことから，更なる研究が必要である．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計５件)

1. H. Oshima, A lower bound of nilpotency class of the group of self-homotopy classes, Mathematical Journal of Ibaraki University 42 (2010), to appear, 査読有.
2. K. Oshima and H. Oshima, Homotopy groups of the spaces of self-maps of Lie groups II, Kodai Mathematical Journal 32 (2009), 530-546, 査読有.
3. H. Oshima, A quotient group of the group of self homotopy equivalences of SO(4), Kodai Mathematical Journal 31 (2008), 82-91, 査読有.
4. K. Maruyama and H. Oshima, Homotopy groups of the spaces of self-maps of Lie groups, Journal of the Mathematical Society of Japan 60 (2008), 767-792, 査読有.
5. M. Arkowitz, H. Oshima and J. Strom, Homotopy classes of self-maps and induced homomorphisms of homotopy groups, Journal of the Mathematical Society of Japan 58 (2006), 401-418, 査読有.

〔学会発表〕（計２件）

1. H. Oshima, A lower bound of nilpotency class of the group of self-homotopy classes, The international conference on algebraic topology, 2009 年 9 月 26 日, Korea 大学.
2. H. Oshima, Homotopy classes of self maps, International conference on algebraic topology, 2006年10月15日, Kaifeng 大学.

〔その他〕
ホームページ等
http://www.ibaraki.ac.jp

６．研究組織
(1)研究代表者
大嶋　秀明（Oshima Hideaki）
　茨城大学・理学部・教授
　研究者番号：70047372