様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　２１年　５月２８日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2006～2008
課題番号：18540068
研究課題名（和文）共形幾何学とループ群による平均曲率一定曲面の構成の研究

研究課題名（英文）　Research on constructions of constant mean curvature surfaces in terms of conformal geometry and loop groups

研究代表者 井ノ口　順一　（INOGUCHI JUN-ICHI）
宇都宮大学・教育学部・准教授
研究者番号：40309886

研究成果の概要：　２次複素特殊線型群 SL(2,C)のループ群を用いて５次元等質空間 SL(2,C)/U(1)に値をもつルジャンドル調和写像に対するループ群論的構成法（DPW 法）を確立した。ルジャンドル調和写像と３次元双曲空間内の平均曲率一定曲面との対応により、ループ群論的構成法を用いて、３次元双曲空間内の、指定された臍点をもち、平均曲率が一定値で、その絶対値が１未満の曲面を局所的に構成することが可能になった。また極小曲面も同時に構成することが可能になった。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	1,100,000	0	1,100,000
２００７年度	1,000,000	300,000	1,300,000
２００８年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	3,100,000	600,000	3,700,000

研究分野：幾何学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：平均曲率一定曲面・共形幾何学・
ループ群・調和写像

１．研究開始当初の背景

３次元ユークリッド空間内の極小曲面は複素解析を用いた構成法（ワイエルシュトラウス構成法）を持つ。複素解析的データ（ワイエルシュトラウス・データとよばれる）を用い極小曲面を複素積分表示することができる。この積分表示はワイエルシュトラウス表現公式（またはワイエルシュトラウス・エンエッパー表現公式）とよばれている。
一方、平均曲率が零でなく一定値である曲面（以下「平均曲率一定曲面」と略称する）に対しては Dorfmeister 氏，Pedit 氏，Wu 氏によるループ群を用いたワイエルシュトラウス構成法の一般化（DPW 法）が 1998 年に得られた。
ＤＰＷ法は無限次元リー代数に値をもつ複素解析的データ（正則ポテンシャルとよばれる）から平均曲率一定曲面を構成する方法である。極小曲面のときのように複素積分を用いた表現公式ではなく、無限次元リー群（ループ群）の分解定理を介して曲面の位置ベクトル場を与えるという手続きである。

DPW 法を用いて平均曲率一定曲面の構成に関する研究は大きく進展した。今日見られるようになった平均曲率一定曲面の画像の多くはDPW 法を原理とする数値計算ソフトウエア CMC-Lab により作成されている（Schmitt 氏作成）。DPW 法を用いた非自明な位相をもつ平均曲率一定曲面の構成は活発に行われている。

DPW 法は３次元球面の平均曲率一定曲面にも適用できる。３次元双曲空間の場合は平均曲率の絶対値が１以上であればDPW 法が適用できる。平均曲率の絶対値が１以上という条件は本質的である。

３次元双曲空間における平均曲率の絶対値が１未満の平均曲率一定曲面の組織的構成法は確立されておらず、DPW 法を拡張した理論が熱望されていた。　平均曲率の絶対値が１以上の平均曲率一定曲面は３次元ユークリッド空間あるいは３次元球面内の平均曲率一定曲面と局所的に対応することが知られている（ローソン対応とよばれる)。

平均曲率の絶対値が１未満の場合は３次元ユークリッド空間にも３次元球面にも局所的対応物をもたない。これらの曲面は真に双曲幾何学に特有の曲面であるといえる。

これまで３次元双曲空間における非自明な位相をもつ「平均曲率の絶対値が１未満の平均曲率一定曲面」の組織的かつ明示的(explicit)な構成法は得られてこなかった。平均曲率の絶対値が２以上の場合にＤＰＷ法を適用できる理論的背景にはこのローソン対応の存在がある。この意味でＤＰW法を「平均曲率の絶対値が１未満」の場合に拡張することは決して自明・単純な課題ではないことがわかる。

またDPW 法はリーマン面で定義されリーマン対称空間に値をもつ調和写像の構成理論を基礎にしている。平均曲率一定曲面の単位法線場（ガウス写像）は２次元球面に値をもつ調和写像である。２次元球面はリーマン対称空間の典型例である。像空間が対称空間であることは本質的であり、DPW 法は一般の等質空間には拡張できない。像空間が対称空間の場合、調和写像は自然な連続的１径数変形族をもつ。この変形族の存在はループ群論を用いた研究アプローチの前提（出発点）となる条件「零曲率表示」を導く。しかしながら対称空間でない等質空間に値をもつ調和写像に対しては「零曲率表示」をいつみたすかということさえも自明な問題ではない。

対称空間でない等質空間への調和写像に対しDPW 法を拡張することは調和写像の幾何学において熱望されてきた課題であった。これまでに知られてきた「対称空間でない等質空間」に値をもつ調和写像の構成理論には「超水平正則曲線」と「原始写像」の２種がある。前者はある種の等質複素多様体に値をもつリーマン面からの正則写像の一種である。超水平正則曲線は調和写像である。
この種の写像はツイスター構成法とよばれる構成理論が確立されている。後者はリーマン一般対称空間(Riemannian k-symmetric space)に値をもつ写像であり、やはり調和写像である。正則写像とは異なるが、正則写像と同様に一階の編微分方程式系で定義されている（調和写像の方程式は２階偏微分方程式である)。『「超水平正則曲線」でも「原始写像」でもない調和写像に対しＤＰW法を拡張できるか』は調和写像の理論における重要な研究課題である。

２．研究の目的　3 次元双曲空間内の平均曲率一定曲面と５次元擬リーマン等質空間 SL(2,C)/U(1)へのルジャンドル調和写像が一対一に対応することを本研究者は以前の研究で見出していた。さらにルジャンドル調和写像はＤＰW法の前提となる「零曲率表示」をみたすことも示していた。
また SL(2,C)/U(1)は５次元であるため複素構造をもたない。したがってルジャンドル調和写像は「正則曲線」にはなりえない。　また SL(2,C)/U(1)はリーマン一般対称空間であるがルジャンドル調和写像は（一般には）原始写像ではない。

（１）これらの事実に基づき,SL(2,C)/U(1)の、ルジャンドル調和写像に対し DPW 法を一般化することを本研究の主目的とした。この定式化の最大の利点は平均曲率の値には無関係なことにある。これまでに得られている「平均曲率の絶対値が１以上の平均曲率一定曲面に対する DPW 法」を含み、さらに平均曲率の絶対値が１未満の場合も扱える「統一的な構成理論」を与えられるからである。

（２）３次元双曲空間内の平均曲率が零の曲面（極小曲面）に共形変形を施すことにより、共形幾何学におけるウイルモア曲面を得ることができる。この事実に着目し共形幾何学の見地から平均曲率一定曲面を考察することも研究目的とした。

（３）これらの研究過程で得られるさまざまなループ群に関する事実を他の微分幾何学的問題に応用することも目的とした。

（４）3 次元双曲空間は可解リー群(solvable Lie group)の構造を自然に備えている。双曲空間内の極小曲面に対する構成法をより一般の可解リー群に対し一般化することも考察する。

３．研究の方法　（１）5 次元等質空間 SL(2,C)/U(1)に正規擬リーマン計量(normal homogeneous semi-Riemanian metric)を与え，正規擬リーマン等質空間とし、この計量に関する調和写像の構成方法を研究する。SL(2,C)/U(1)を 3 次元双曲空間の単位接ベク

トル束と同一視する。この同一視を用いて双曲空間内の曲面に対する新たなガウス写像を定める。この新たなガウス写像は単位接ベクトル束のもつ標準的接触構造に関し「ルジャンドル」という条件をみたす。この事実に着目し,SL(2,C)/U(1)に値をもつルジャンドル調和写像に対するループ群論を用いた定式化を行い, DPW 法を拡張する。

（２）SL(2,C)/U(1)のもつ等質空間としての特徴を解明し、この空間が定めるループ群の分解定理を証明する。

４．研究成果

（１）Josef Dorfmeister 氏・小林真平氏と共同研究を行った。その成果として,第４種概コンパクト型自己同型写像により定まるSL(2,C)のループ群を用いて SL(2,C)/U(1)に値をもつルジャンドル調和写像に対するDPW 法を確立した。この方法により、３次元双曲空間内の、指定された臍点をもつ平均曲率が一定値で、その絶対値が１未満の曲面を局所的に構成することが可能になった。初等的な例（全臍的曲面・回転面）をこの方法で再現することもできた。平均曲率の絶対値が１以上の場合に比べ、構成問題・分類問題が進展してこなかった「平均曲率の絶対値が１未満の平均曲率一定曲面」の新しい例の大域的構成が期待できる。また今回の研究成果である「一般化された DPW 法」では極小曲面も平均曲率が零でなく一定の曲面も全く兵並行して扱える特長を備えている。極小曲面の構成・分類に対しても役立つことが期待される。この研究成果は Dorfmeister 氏・小林氏との共著論文として発表する計画である。（J.Dorfmeister, J.Inoguchi, S.P.Kobayashi, Constant mean curvature surfaces in hyperbolic 3-space via loop groups を準備中)。

（２）サーストン氏の意味での「３次元幾何学」の８つのモデル空間のひとつである可解幾何の空間 Sol における極小曲面の構成法を考察した。 Sol, ３次元双曲空間, ３次元ユークリッド空間, ２次元双曲空間と数直線の直積空間を含む３次元等質空間の２径数族を以前の論文 (Minimal surfaces in 3-dimensional solvable Lie groups, Chinese Annals of Mathematics B 24 2003 73—84, 及び Part II, Bulletin of the Australian Mathematical Society 74 (2006), 359—367)で考察していた。２径数族に属する等質空間内の極小曲面に対する積分表示公式を得ていた。この公式では法ガウス写像(normal Gauss map)とある複素関数の組をデータとしていた。S.Lee 氏と共同研究を行い,以前に得ていた積分表示公式を「法ガウス写像のみをデータとする積分表示公式」に改良することに成功した。さらに法ガウス写像がなんらかのリーマン計量に関して調和写像となるのはユークリッド空間・双曲空間・Sol の３つの空間に限られることを証明した。可解空間 Sol においては一般ホップ微分(Abresch-Rosenberg 微分)とよばれる正則２次微分が存在しないため極小曲面の構成論が未開拓であった。今回の研究成果を用いた新種の極小曲面の構成が期待される。この成果は Lee 氏との共著論文（雑誌論文⑪）として発表した。

（３）①研究成果（２）の研究成果をもとにサーストン氏の意味での「３次元冪零幾何」のモデル空間である３次元ハイゼンベルグ群 Nil における極小曲面に対する積分表示公式を得た。２次元双曲空間に値をもつ調和写像を法ガウス写像にもつ極小曲面が得られることを証明した。この公式は雑誌論文⑦として発表した。

②Nil は螺旋面を極小曲面として含む。この点に着目し、より一般の３次元リーマン等質空間内で螺旋面の類似に相当する曲面を考察した。Nil を含む３次元リーマン等質空間の２経数族を与え、この族に属するリーマン等質空間内における極小螺旋面を構成した。この成果は Bekkar 氏, Bouziani 氏, Boukhatem 氏との共著論文（雑誌論文⑩）として発表した。

（４）SL(2,C)/U(1)に値をもつルジャンドル調和写像の類似として等質空間 SL(3,R)/SO(1,2)に値をもつ（ローレンツ）調和写像の構成理論を考察した。とくに SL(3,R)/SO(1,2)上の直線束である等質空間 SL(3.R)/SO(1,1)に値をもつ特殊な調和写像（一階微分方程式の解として定まる特徴をもつ）のループ群を用いた構成法を宇田川誠一氏との共同研究で得ることができた。ここで考察したローレンツ調和写像は３次元アフィン空間における「アフィン球面」とよばれるクラスの曲面と対応するため、ループ群を用いたアフィン球面の構成を行うことが期待できる。(宇田川氏との共著論文, J.Inoguchi and S.Udagawa, affine spheres of finite type and Symes method を準備中)。

（５）一般の３次元等質空間内で、「豊かな平均曲率一定曲面の幾何」が展開できるかどうかを判定する方法を考察した。ひとつの案として「単純な平均曲率一定曲面を含むかどうか」という観点で３次元等質空間を特徴付ける研究を行った。

①３次元定曲率空間（ユークリッド空間・球面・双曲空間）の場合、単純な平均曲率一定曲面は「第二基本形式が平行」という特徴をもつことに着目し、３次元リーマン等質空間内の第二基本形式が平行な曲面の分類を J.Van der Veken 氏との共同研究で遂行した。この研究成果は雑誌論文⑥と⑫として発表した。

②３次元リーマン等質空間内の平均曲率一

定曲面に対する等質空間論の観点からの研究を内藤博夫氏と行った。内藤氏は高次元リーマン対称空間内の部分多様体に対するグラスマン幾何学の理論を駆使した研究を行ってきた。内藤氏との共同研究で特殊ユニタリー群 SU(2)における軌道型曲面の存在条件を求めることができた。また軌道型平均曲率一定曲面を与えることに成功した。この研究成果は内藤氏との共著論文（雑誌論文②）として発表される。

（６）３次元ミンコフスキー空間内の平均曲率一定な空間的曲面(spacelike surface)及び時間的曲面(timelike surface)に対する DPW 法は以前に本研究者が Dorfmeister 氏・M.Toda 氏との共同研究において得ている。一方、計量が退化している曲面(光的曲面)の微分幾何学的研究は比較的新しく、大域的な研究は少ない。これまでの先行研究を本研究課題の観点から検討し、いままで研究されてこなかった新しい光的曲面のクラス（光的接線曲面）の概念を導入し、その基本性質を調べた。この成果は S.Lee 氏との共著論文（雑誌論文⑤）として発表した。

（７）本研究課題においては３次元双曲空間の単位接ベクトル束 SL(2,C)/U(1)に値をもつルジャンドル調和写像に対するループ群論的構成法（DPW 法）を主に研究してきた。調和写像に課した条件「ルジャンドル」は単位接ベクトル束のもつ標準的接触構造を用いて定める性質である。本研究課題において研究を行った DPW 法の拡張は接触構造に依存している部分があるはずである。そこで接触構造との関わりを研究するために、３次元等質接触リーマン多様体における接触幾何学的な曲線(放物的測地線)を J.T.Cho 氏, J.-E.Lee 氏との共同研究で考察した。とくに 3 次元佐々木空間系における放物的測地線を分類できた。この成果は雑誌論文③として発表される。また Cho 氏, Lee 氏との共同研究を継続し接触幾何学的極小曲面・重調和曲面の概念を導入しそれらの基本性質を調べた。その成果は雑誌論文④として発表した。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 12 件）

① T.Ichiyama,J.Inoguchi and H.Urakawa, Biharmonic maps and bi-Yang-Mills fields, Note di Matematica, 印刷中, 査読有.

② J. Inoguchi and H.Naitoh, Grassmann geometry of 3-dimensional unimodular Lie groups I, Hokkaido Mathematical Journal , 印刷中, 査読有.

③ J.T.Cho, J.Inoguchi and J.-E.Lee, Parabolic geodesics in Sasakian 3-manifolds, Canadian Matematics Bulletin, 印刷中, 査読有.

④ J.T.Cho, J.Inoguchi and J.-E.Lee, Affine biharmonic submanifolds in 3-dimensional pseudo-Hermitian geometry, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg, 79 (No.1), 2009, 113-133. 査読有.

⑤J.Inoguchi and S.Lee, Lightlike surfaces in Minkowski 3-space, International Journal of Geometric Methods on Modern Physics 6 (No.2), 2009, 267-283, 査読有.

⑥ J.Inoguchi and J.Van der Veken, A complete classification of parallel surfaces in three-dimensional homogeneous spaces, Geometriae Dedicata 131 (2009), 159-172. 査読有.

⑦ J.Inoguchi, Minimal surfaces in the 3-dimensional Heisenberg group, Differential-Geometry Dynamical Systems 10 (2008), 163-169. 査読有.

⑧井ノ口順一, 戸田方程式と微分幾何, 九州大学応用力学研究所講究録 19ME-S2, Article Number 9, 2008. 査読無.

⑨井ノ口順一, 黒微分と DS 方程式のはなし, 九州大学応用力学研究所講究録 18ME-S5, Article Number 15, 2007. 査読無.

⑩F.Bekkar, F.Bouziani, Y.Boukhatem and J.Inoguchi, Helicoids and axially symmetric minimal surfaces in 3-dimensional homogeneous spaces, Differntial Geometry -Dynamical Systems 9 (2007), 21-39. 査読有.

⑪ J.Inoguchi and S.Lee, A Weierstrass representation for minimal surfaces in Sol, Proceedings of American Mathematical Society 136 (2008), 2209-2216. 査読有.

⑫ J.Inoguchi and J.Van der Veken Parallel surfaces in the motion groups E(1,1) and E(2), Bulletin of the Belgian Mathematical Society, Simon Stevin 14 (2007), 317—320. 査読有.

〔学会発表〕（計 5 件）

①井ノ口順一, 黒微分とＤＳ方程式のはなし, 研究集会「非線形波動現象における基礎理論, 数値計算および実験のクロスオーバー」, 2006 年 11 月 18 日, 九州大学応用力学研究所.

② Jun-ichi Inoguchi, Classification of surfaces with parallel second fundamental form in 3-dimensional homogeneous spaces, London Mathematical Society Durham Conference, Methods of Integrable Sytems in Geometry (informal seminar), 2006 年 8 月 24 日, ダーラム大学(Durham University, 英国).

③　一山稔之・井ノ口順一・浦川肇, Biharmonic maps and bi-Yang Mills fields, 日本数学会秋季総合分科会（幾何学分科会）, 2007年9月21日, 東北大学.
④井ノ口順一, Affine spheres of finite type, ＤＭＨＦ2007 COE conference on the development of Dynamic Mathematics with high functionality, 2007年10月2日, 福岡リーセントホテル.
⑤ 井ノ口順一, 戸田格子の微分幾何, 研究集会「戸田格子40周年. 非線形波動研究の歩みと展望」, 2007 年 11 月 8 日, 九州大学応用力学研究所.

〔図書〕（計2件）
①　井ノ口順一, いろいろな幾何と曲線の時間発展, 北海道大学理学部数学教室(北海道大学数学講究録138), (2008), 66ページ.
②　井ノ口順一, 幾何学いろいろ, 日本評論社, 2007, 209ページ.

６．研究組織
(1)研究代表者
井ノ口　順一　（INOGUCHI　JUN-ICHI）
宇都宮大学・教育学部・准教授
研究者番号　40309886

(2)研究分担者

(3)連携研究者