

機関番号：32403

研究種目：基盤研究 (C)

研究期間：2006年度～2010年度

課題番号：18540090

研究課題名 (和文) 曲面の錐状特異点付きユークリッド構造とタイヒミュラー空間

研究課題名 (英文) Euclidean cone structures on a surface and Teichmüller spaces

研究代表者 高山 晴子 (HARUKO NISHI)

城西大学・理学部・准教授

研究者番号：90274430

研究成果の概要(和文):タイヒミュラー空間は曲面上の複素構造の同値類からなる空間であり、その上の幾何構造は大変複雑な様相を呈している。本研究ではタイヒミュラー空間を曲面上の錐状特異点付きユークリッド構造のモジュライ空間と同一視することによりその幾何構造を解明することを目的とし、超楕円曲線のタイヒミュラー空間が平面多角形の相似類がなすモジュライ空間と同型であることを示すことを試みた。その結果、1点付きトーラスのタイヒミュラー空間が平面四角形の相似類がなすモジュライ空間の記述を得た。さらに多角形の面積形式による幾何構造を誘導した。

研究成果の概要(英文):The space of equivalence classes of complex structures on a surface is called Teichmüller space whose geometry is known to be very complicated. We study Teichmüller space through Euclidean cone-structures on a surface and try to show the one-to-one correspondence between Teichmüller space and the space of similarity classes of Euclidean polygons. As a result, we show an isomorphism between the Teichmüller space of one-pointed torus and the space of similarity classes of Euclidean quadrilaterals. Moreover we get a geometric structure induced by the area form on the polygons.

## 交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
18年度	1,000,000	0	1,000,000
19年度	900,000	270,000	1,170,000
20年度	800,000	240,000	1,040,000
22年度	700,000	210,000	910,000
年度			
総計	3,400,000	720,000	4,120,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：トポロジー、タイヒミュラー空間、平面多角形

## 1. 研究開始当初の背景

(1) タイヒミュラー空間の理論はリーマン面のモジュライ空間と曲面の同相写像類群と密接に関係して、代数幾何、関数論、数論、複素力学系、低次元トポロジー、数理物理など広い分野と関わりながら発展してきてい

たが、中でも3次元双曲幾何と複素力学系および関数論がタイヒミュラー空間を舞台として互いに交差して得られた結果は多く、研究開始当初はちょうど Thurston による3次元多様体の幾何学化予想に関する一意化定理の証明や、関数論における難問であった

Ahlfors 予想の解決 (トポロジーにおける Marden 予想の解決の帰結) が行われたばかりであった。

(2) 一方、タイヒミュラー空間自身の幾何に関しては、タイヒミュラー計量や Weil-Petersson 計量など曲面の同相写像類群の作用によって保たれる計量が様々に知られているが、それぞれ克服すべき性質を抱えている。例えばタイヒミュラー計量は負曲率完備多様体あるいはさらに強く  $\delta$ -双曲空間の性質を多くみだしているが、Masur によってタイヒミュラー空間は負曲率を持ち得ないことが示され、さらに Masur-Wolf の結果によって  $\delta$ -双曲でもないことが示されていた。また Weil-Petersson 計量は完備でない。

(3) 正則 1 形式付きのリーマン面のモジュライ空間あるいは正則二次微分付きのリーマン面のモジュライ空間は、 $SL(2, \mathbb{R})$  作用のエルゴード的作用をもつことが知られており、力学系の観点から平面有理多角形のペリアードの問題や曲面上の interval exchange 写像と関係した研究が多くなされていたが、研究開始当初はさらにその位相についての研究が新たに始まり、Kontsevich-Zorich による連結性の結果に続き、Lanneau 等による正則 1 形式のモジュライ空間の各滑層の連結成分の個数の決定がなされていた。また、リーマン面のモジュライ空間内のタイヒミュラー曲線と呼ばれる  $SL(2, \mathbb{R})$  作用で不変な全測地的部分多様体の分類が McMullen 等の研究によって進み、Eskin-Okounkov により正則 1 形式付きのリーマン面のモジュライ空間の滑層の体積の計算が、トラスの Gromov-Witten 不変量の計算に用いられた。

## 2. 研究の目的

(1) タイヒミュラー空間の新しい大域パラメータを構成し、その大域パラメータによるタイヒミュラー空間の新たな幾何構造を構築し、その幾何構造の写像類群による作用、タイヒミュラー空間の境界、タイヒミュラー曲線の記述などを行うことを目的とした。

(2) Troyanov による点付きリーマン面のモジュライ空間と曲面上の錐状特異点付きユークリッド構造のモジュライ空間とが同一視できるという結果が知られていたが、錐状特異点付きユークリッド構造を用いたリーマン面のモジュライ空間およびタイヒミュラー空間上の幾何構造についての研究はまだ他になかった。我々はその点に注目して、曲面上の錐状特異点付きユークリッド構造のモジュライ空間の大域パラメータを構築することを目的とし、さらに錐状特異点付きユークリッド構造がもつ自然な面積形式が誘導する幾何構造がタイヒミュラー空間の新たな幾何構造となるかを調べることを目的とした。

クリッド構造がもつ自然な面積形式が誘導する幾何構造がタイヒミュラー空間の新たな幾何構造となるかを調べることを目的とした。

(3) 超楕円曲線のモジュライ空間が、平面多角形の相似類のなすモジュライ空間と局所同型であることを大鹿健一氏 (阪大) との共同研究で明らかにした経緯から、平面多角形のモジュライ空間が対応する曲面のタイヒミュラー空間と大域的に同型であることを示すことを目的とした。ここで平面多角形から構成される超楕円曲線に関して、多角形の退化と対応する超楕円曲線の退化の呼応により期待できる超楕円曲線のタイヒミュラー空間の幾何構造を平面多角形のモジュライ空間の幾何構造を明らかにすることで得ることを目標とした。

## 3. 研究の方法

(1) 超楕円曲線の場合にリーマン面上の特異点付きユークリッド構造に対応する正則 1 形式のホロノミー表現がタイヒミュラー空間の局所パラメータのみにとどまらず大域的パラメータになることを示すため、超楕円曲線のタイヒミュラー空間と平面多角形の相似類のなすモジュライ空間との間に、第三の空間として「標識付き」の 2 次元球面上の錐状特異点付きユークリッド構造のモジュライ空間を導入した。また、「標識付き」の 2 次元球面上の錐状特異点付きユークリッド構造の面積形式を導入するモジュライ空間上の計量を調べるため、面積形式の符号を決定した。さらに、曲面の写像類群の作用を標識付きの 2 次元球面上の錐状特異点付きユークリッド構造のモジュライ空間上に誘導し対応する平面多角形の相似類のなすモジュライ空間上の「V 作用」を記述した。超楕円曲線以外のリーマン面のタイヒミュラー空間については、その上の錐状特異点付きユークリッド構造が誘導する正則 1 形式からリーマン面の正則 1 形式の零点を頂点とする分割による組み合わせ構造を用いて、大域パラメータを構成することとした。

(2) 平面多角形が超楕円曲線のタイヒミュラー空間の大域パラメータとなることを示す過程において、特異多角形を非特異多角形に V 作用により変換できることを示すため、具体的なリーマン面のデータの蓄積が必要となり数式ソフト Matlab および Mathematica を用いて多数のコンピュータ実験を行った。この際、長藤かおり氏 (九大数理) の協力を得た。またこのコンピュータ環境の整備として、Apple の Macintosh コンピュータをデスクトップ型およびノートパソコン型ともに

アップデートしながら購入し、その周辺機器および数式ソフトも購入した。

(3) 連携研究者である大鹿健一氏（阪大）と常時研究連絡をとる他、トポロジーや幾何の国内研究集会および関連する分野のセミナー等に積極的に参加し、他の研究者達との議論および最新情報の交換を行った。特に小森洋平氏（阪市大理）と宮地秀樹氏（阪大理）とタイヒミュラー曲線の分類に関する勉強会を行った。また、タイヒミュラー空間の専門家であるルイパスツール大学（フランス、ストラスブール）の A. Papadopoulos 教授や M. Coornaerd 教授と議論するためストラスブールに 2006 年度と 2008 年度に二度短期滞在した。また 2007 年度には正則 1 形式付きのモジュライ空間について近年発展した研究の推進者である A. Zorich 教授とレンヌ大学（フランス）を訪れて議論した。2010 年度に A. Papadopoulos 教授が来日した際には研究集会での講演を依頼した。

(4) タイヒミュラー空間およびリーマン面のモジュライ空間の最新文献を整備するため、位相幾何学関連図書、微分幾何学関連と書、代幾何学関連図書をはじめとして、複素解析、複素力学系、数論、組み合わせ数学などに関する図書の購入を行った。

#### 4. 研究成果

(1) 超楕円曲線のタイヒミュラー空間と平面多角形の相似類のなすモジュライ空間との間に、第三の空間として「標識付き」の 2 次元球面上の錐状特異点付きユークリッド構造のモジュライ空間を定義し、超楕円曲線のタイヒミュラー空間と標識付きの 2 次元球面上の錐状特異点付きユークリッド構造のモジュライ空間との間の同型を示した。その結果、超楕円曲線のタイヒミュラー空間と平面多角形のモジュライ空間との同型を得るためには、標識付きの 2 次元球面上の錐状特異点付きユークリッド構造のモジュライ空間と平面多角形のモジュライ空間との同型を示せばよいことに帰着した。

(2) 平面多角形のモジュライ空間に定義した V-move により特異四角形が非特異四角形に移されることを証明した。この際、ある整数の組の存在を証明したが、長藤氏の協力により、コンピュータ実験によりこの整数の組の具体的な候補が求まり別証明を得た。この結果、タイヒミュラー空間の元に対応する平面 4 角形の条件が明確になり、平面 4 角形のモジュライ空間と 1 点付きトーラスのタイヒミュラー空間との間の同型を得た。また、小森氏（阪市大理）と宮地氏（阪大理）の協力

により、リーマン面のモジュライ空間内の測地的流の拡張であるタイヒミュラー曲線の分類に関する勉強会を行った結果、Kenyon-Smillie による区間交換写像に対する不変量である J 不変量によりタイヒミュラー空間の元に対応する平面四角形の条件が記述できることがわかった。

(3) 平面 5 角形の多角形のモジュライ空間と種数 2 の曲面のタイヒミュラー空間との局所同型を大域同型に拡張する試みを行った四角形のとくと同様に五角形の場合にも、特異五角形を V-move により非特異五角形に変形することに問題が帰着された。四角形のとく比べると特異五角形の種類が増えたことに加え、V-move の組み合わせも圧倒的に複雑さが増し、様々な場合をコンピュータ実験を多数行って検証した。蓄積したデータ上では未だ非特異五角形に変形できないような反例はない。しかしながら、完全な証明には未だ至らず今後引き続き課題とする。

(4) 標識付きの 2 次元球面上の錐状特異点付きユークリッド構造のモジュライ空間の面積形式によりタイヒミュラー空間上に計量が導入されることを示した。これは奇数個の辺数をもつ多角形に対応する曲面のタイヒミュラー空間上では非退化であり、またその二次形式としての符号は  $(m, m)$  型であることがわかった。とくにこの計量は曲面の写像類群で不変である。また双曲型ではないことから、他の計量とくに Weil-Peterson 計量との比較等がこれからの課題となる。また、この境界の挙動およびタイヒミュラー曲線についても今後の課題とする。

#### 5. 主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 5 件）

- ① K. Ohshika and H. Miyachi, Uniform models for the closure of the Riley slice, In the tradition of Ahlfors-Bers. V, 249-306, Contemp. Math. 510, 2010. 査読有.
- ② L. Li, K. Ohshika and X. Wang, On Klein-Maskit combination theorem in space. I. Osaka J. Math. 46, 2009, 1097-1141. 査読有.
- ③ K. Ohshika, Constructing geometrically infinite groups on boundaries of deformation spaces, J. Math. Soc. Japan, 61, 2009, 1261-1291. 査読有.
- ④ K. Ohshika, On topologically tame

Kleinian groups with bounded geometry, Spaces of Kleinian groups, 29-48, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 329, 2006. 査読有.

- ⑤ K. Matsumoto, H. Nishi and M. Yoshida, Automorphic functions for the Whitehead link-complement group, Osaka J. Math. 43 (2006) 839-876. 査読有.

[学会発表] (計 8 件)

- ① Haruko Nishi, A metric on the Teichmüller space of once-puncture torus, Workshop of Teichmüller space and related topics, 20<sup>th</sup> January 2011, Josai University.
- ② Ken'ichi Ohshika, Geometric limits of freely indecomposable Kleinian groups, リーマン面不連続研究集会, 大阪大学, 2009年1月
- ③ Ken'ichi Ohshika, Classification of geometric limits, Hyperbolic geometry and related topics, KIAS Seoul Korea, 2008年12月
- ④ Ken'ichi Ohshika, Deformation spaces of Kleinian groups, Algebraic Topology, Braids and Mapping class Groups, National Univerre, 2008年12月
- ⑤ Ken'ichi Ohshika, Geometry and topology of geometric limits, リーマン面・不連続群研究集会, 岡山大学, 2008年1月
- ⑥ Ken'ichi Ohshika, Geometric limits viewed through model manifolds, 離散群と双曲空間の解析学とトポロジー, 京都大学数理解析研究所, 2007年12月
- ⑦ Ken'ichi Ohshika, Divergence, exotic convergence and self-bumping in quasi-Fuchsian spaces, Workshop on Hyperbolic structures on 3-manifolds and large scale geometry of Teichmüller space, University of Warwick, 2007年7月
- ⑧ Ken'ichi Ohshika, Small actions of 3-manifold groups on R-trees and degeneration of hyperbolic structures, 多様体上の双曲群の作用とその周辺, 首都大学東京, 2006年6月

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

高山 晴子 (HARUKO NISHI)  
城西大学・理学部・准教授  
研究者番号：90274430

### (2) 研究分担者

大鹿 健一 (KEN' ICHI OHSHIKA)  
大阪大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：70183225  
(H20→H22：連携研究者)  
大場 清 (KIYOSHI OHBA)  
お茶の水女子大学・理学部・准教授  
研究者番号：80242337  
(H20→H22：連携研究者)

### (3) 研究協力者

長藤 かおり (KAORI NAGATOU)  
九州大学・大学院数理学研究院・准教授  
研究者番号：40326426  
小森 洋平 (YOHEI KOMORI)  
大阪市立大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号：70264894  
宮地 秀樹 (HIDEKI MIYACHI)  
大阪大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号：40385480