

平成 21 年 6 月 5 日現在

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2006～2008

課題番号：18540106

研究課題名（和文）例外型 Lie 群の Weyl 群の不変量とその応用

研究課題名（英文）Invariants of the Weyl groups of exceptional Lie groups and their applications

研究代表者

中川 征樹 (MASAKI NAKAGAWA)

高松工業高等専門学校・一般教育科・講師

研究者番号：50370036

研究成果の概要：コンパクト単連結単純 Lie 群  $G$  をその極大トーラス  $T$  で割って得られる完全旗多様体  $G/T$  のコホモロジー環は、 $G$  の Weyl 群の極大トーラス  $T$  への作用に関する不変式環を用いて記述されるが(Borel 表示)，これをもとに  $G$  が例外型 Lie 群  $E_8$  の場合に旗多様体  $E_8/T$  の整数係数コホモロジー環を決定した。さらに，差分商作用素を計算する Maple プログラムを作成し，これを用いて，全てのコンパクト単連結単純 Lie 群  $G$  に対して，対応する旗多様体  $G/T$  の整数係数コホモロジー環の Schubert 類による表示(Schubert 表示)を与えた。さらに，これらの結果と Grothendieck の remark をもとに， $G$  が例外型 Lie 群  $E_6, E_7, E_8$  の場合に，対応する複素 Lie 群の Chow 環を決定した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	1,200,000	0	1,200,000
2007 年度	900,000	270,000	1,170,000
2008 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,000,000	540,000	3,540,000

研究分野：

科研費の分科・細目：幾何学

キーワード：不変式環, Weyl 群, 分類空間, コホモロジー, 旗多様体, Schubert 算法, 等質空間

## 1. 研究開始当初の背景

## (1) Lie 群の特性類の研究

H. Whitney, E. Stiefel, L. Pontrjagin, S. Chern 等により導入された多様体の特性類の理論は，トポロジー，微分幾何等現代幾何学において重要な役割を果たし，その有用性は広く認められている。代数的トポロジーの観点から見ると，これらはユニタ

リー群  $U(n)$  や直交群  $O(n)$  など古典型 Lie 群の分類空間  $BU(n)$  や  $BO(n)$  のコホモロジー環の生成元として捉えることができる。したがって一般のコンパクト Lie 群  $G$  に対して，その分類空間  $BG$  のコホモロジー環の構造を決定することは基本的に重要であり，1953 年の A. Borel の研究以降，代数的トポロジーの中心的な研究対象の一つである。

しかしながら、特に  $G$  が例外型 Lie 群の場合、分類空間のコホモロジーにはねじれ元が存在し、したがって、そのコホモロジー環は大変複雑な構造をもつため、多くのトポロジストの努力にも拘らず、未だに多くの場合が未決定である。

## (2) Lie 群の等質空間の位相幾何学的研究

球面や射影空間、Grassmann 多様体など現代数学に登場する多くの多様体が Lie 群の等質空間として表される。多様体を特徴付ける様々な不変量の中でも、コホモロジーは最も基本的な情報を与えるものであり、特に、Lie 群  $G$  をその閉部分群  $H$  で割って得られる等質空間  $G/H$  のコホモロジー環の研究もまた、H. Cartan, A. Borel 以降、代数的トポロジーの中心的な研究対象の一つとなっている。しかしながら、ここでも例外型 Lie 群の等質空間、特に旗多様体や対称空間など応用上重要な等質空間の整数係数コホモロジー環は、多くの場合が未決定である。

## 2. 研究の目的

### (1) Lie 群の特性類の研究

例外型 Lie 群の分類空間の  $\text{mod } p$  コホモロジー環は、 $(G, p) = (E_6, 3), (E_7, 2), (E_7, 3), (E_8, 2), (E_8, 3), (E_8, 5)$  の場合が未決定であり、これまで主として代数的トポロジストにより研究が進められ、多くの部分的な結果が得られている。本研究では、特に上記の Lie 群  $G$  の分類空間  $BG$  の  $\text{mod } p$  コホモロジー環について、その環構造や Steenrod 代数上の構造などを決定することを目的とする。

### (2) Lie 群の等質空間の位相幾何学的研究

Lie 群の等質空間の中でも、連結な複素 Lie 群  $G$  を、その放物型部分群  $P$  で割って得られる一般旗多様体(射影的等質多様体)について、特に  $G$  が例外型 Lie 群の場合に、そのコホモロジー環の環構造や生成元の幾何学的意味付け(Schubert 類)、生成元の多項式代表(Schubert 多項式)等を決定することを目的とする。

## 3. 研究の方法

### (1) Lie 群の特性類の研究

コンパクト Lie 群  $G$  の分類空間  $BG$  に対して、 $BG$  の  $\text{mod } p$  コホモロジー環へ収束する Rothenberg-Steenrod のスペクトル系列の

計算やコホモロジー作用素などのトポロジー的手法および Weyl 群を含むより一般の有限鏡映群に関する不変式論、Galois 理論などの群論的手法を用いて、 $BG$  のコホモロジー環を決定する。

### (2) Lie 群の等質空間の位相幾何学的研究

$G$  を連結な複素 Lie 群、 $P$  をその放物型部分群、 $T$  を  $P$  に含まれる極大トーラスとすると、一般旗多様体  $G/P$  の有理数係数コホモロジー環は、 $G$  および  $P$  の Weyl 群の  $T$  への作用に関する不変式環を用いた表示(Borel 表示)をもつ。これと様々なファイバー束のスペクトル系列の考察などトポロジー的手法を用いて、 $G/P$  の整数係数コホモロジー環を決定する。一方、 $G/P$  の整数係数コホモロジー環は、 $G$  の Bruhat 分解から生ずる  $G/P$  の Schubert 多様体から決まる Schubert 類に基づいた表示(Schubert 表示)をもち、両者を結ぶものとして Bernstein-Gelfand-Gelfand および Demazuren により導入された差分商作用素がある。特に  $G$  が例外群の場合、計算機を援用することにより、差分商作用素を具体的に計算し、 $G/P$  の整数係数コホモロジー環の Schubert 類による表示を決定する。

## 4. 研究成果

### (1) 旗多様体のコホモロジー環の研究

①コンパクト単連結単純 Lie 群  $G$  をその極大トーラス  $T$  で割って得られる旗多様体  $G/T$  の整数係数コホモロジー環は、 $G=E_8$  の場合のみ未決定であったが、 $E_8$  の Weyl 群の不変式環の計算に基づいた Borel 表示を用いて、 $E_8/T$  の整数係数コホモロジー環を完全に決定した。

②Weyl 群の作用による不変式環に基づいた、完全旗多様体の整数係数コホモロジー環の Borel 表示では、生成元に幾何学的な意味合いがなく、Schubert 類との対応関係も明らかではない。Bernstein-Gelfand-Gelfand および Demazure により導入された差分商作用素を用いることにより両者を対応付けられることがわかったので、鍛冶静雄氏の協力の下に差分商作用素の Maple プログラムを完成させ、これを利用して、コンパクト単連結単純 Lie 群に対する完全旗多様体の整数係数コホモロジー環の Schubert 類を用いた表示を Duan-Zhao とは独立に完成させた。

③さらに、プログラムを改良し、完全旗多様体を含むより一般の射影的等質多様体に対しても、上記の差分商作用素による計算を進

め,特に日本のトポロジストにより, Borel 表示に基づいて計算されてきた例外型 Lie 群の等質空間(e.g., Hermite 対称空間 EIII, EVII)の整数係数コホモロジー環の Schubert 類を用いた表示を Duan-Zhao とは独立に確立した.

## (2) 複素代数群の Chow 環の研究

旗多様体は射影的代数多様体の構造ももち, その整数係数コホモロジー環と Chow 環の間には自然な同型が存在する. このことと Grothendieck の Remarques をもとに, 複素単純 Lie 群  $SO(n)$ ,  $Spin(n)$ ,  $G_2$ ,  $F_4$  の Chow 環が, R. Marlin により 1974 年に決定されているが, 残る例外型 Lie 群  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$  の Chow 環については, 旗多様体の整数係数コホモロジー環の決定を待たねばならず, 30 年以上進展がなかった. これに関して, 上記の研究により得られている旗多様体  $E_1/T$  ( $l = 6, 7, 8$ ) の整数係数コホモロジー環の Schubert 表示をもとに,  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$  の Chow 環を決定することができた. また, コホモロジー環の Borel 表示と差分商作用素を利用することで, 上記の R. Marlin による計算を大幅に簡略化することができた.

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

① M. Nakagawa, A description based on Schubert classes of cohomology of flag manifolds, *Fundamenta Mathematicae* 199 (2008), 273-293. (査読有)

② M. Nakagawa, The Chow rings of the algebraic groups  $E_6$ ,  $E_7$ , and  $E_8$ , 京都大学数理解析研究所講究録 1581 (2008), 92-102. (査読無)

③ M. Kameko and M. Mimura, On the Rothenberg-Steenrod spectral sequence for the mod 2 cohomology of classifying space of spinor groups, *Geometry and Topology Monographs* 13 (2008), 261-279. (査読有)

④ H. Kadzisa and M. Mimura, Cartan models and cellular decompositions of symmetric Riemannian spaces, *Topology and Its Applications* 156 (2008), 348-364. (査読有)

⑤ M. Kameko and M. Mimura, Mui invariants

and Milnor operations, *Geometry and Topology Monographs* 11 (2007), 107-140. (査読有)

⑥ M. Kameko and M. Mimura, On the Rothenberg-Steenrod spectral sequence for the mod 3 cohomology of the classifying space of the exceptional Lie group  $E_8$ , *Geometry and Topology Monographs* 10 (2007), 213-226. (査読有)

[学会発表] (計 8 件)

① M. Nakagawa, Schubert calculus in the cohomology rings of flag varieties, 第 55 回トポロジーシンポジウム, 2008 年 8 月 8 日, 金沢市文化ホール.

② M. Nakagawa, The Chow rings of complex algebraic groups, Conference on Algebraic and Geometric Topology, 2008 年 6 月 9 日, Gdansk 大学.

③ M. Nakagawa, The integral cohomology rings of full flag manifolds, Workshop on Schubert calculus, 2008 年 3 月 20 日, 関西セミナーハウス.

④ M. Nakagawa, Multiplicative structure of the Chow rings of projective homogeneous varieties, ホモトピー論シンポジウム, 2007 年 11 月 14 日, 金沢市観光会館.

⑤ M. Mimura, 古典型対称空間の cone-decomposition, ホモトピー論シンポジウム, 2007 年 11 月 13 日, 金沢市観光会館.

⑥ M. Mimura, Cone-decomposition of symmetric spaces of classical type, East Asian Conference on Algebraic Topology, 2007 年 11 月 3 日, ソウル国立大学.

⑦ M. Nakagawa, 代数群  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$  の Chow 環, 日本数学会秋季総合分科会, 2007 年 9 月 22 日, 東北大学.

⑧ M. Nakagawa, The Chow rings of the algebraic groups  $E_6$  and  $E_7$ , and  $E_8$ , 有限群のコホモロジーとその周辺, 2007 年 8 月 30 日, 京都大学数理解析研究所.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中川 征樹

高松工業高等専門学校・一般教育科・講師

研究者番号: 50370036

(2) 研究分担者

三村 護

岡山大学・その他・名誉教授

研究者番号: 70026772

(3) 連携研究者