様式C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21年 5月 12日現在

研究種目： 基盤研究（C）
研究期間： 平成18年度 ～ 平成20年度
課題番号： 18540151
研究課題名（和文）実数のデジタル表示にともなうコンパクト化の力学的・数論的考察

研究課題名（英文）Dynamical systems and number theoretical problems coming from compactifications of digital representations of the real numbers

研究代表者
釜江 哲朗 (TETURO KAMAE)
松山大学 経済学部・教授
研究者番号：80047258

研究成果の概要：本研究の目的は，実数のデジタル表示にともなうコンパクト化の考察であった．とくに，連続なスケーリングを許すような数体系と，この上の同次コサイクルを考察し，興味あるフラクタル関数や自己相似確率過程を導いた．また，派生した問題である一様集合の解析で顕著な結果が得られた．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合 計
18年度	1,200,000	0	1,200,000
19年度	700,000	210,000	910,000
20年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総 計	2,400,000	360,000	2,760,000

研究分野： 数物系科学
科研費の分科・細目： 数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：numeration system, colored tiling, homogeneous cocycle, 一様集合，最適位置

１．研究開始当初の背景

釜江はIsrael Journal of Mathematics (1998年) において，weighted substitutionに基づくcolored tiling spaceの概念をはじめて導入した．これが後に定式化されるnumeration systemである．Indagationes Mathematicae (1999年) において，1/2次の自己相似性をもつ無相関であるが決定的な確率過程N-過程が考察されブラウン運動とは異なるモデルでの予測問題が提起された．

２．研究の目的

numeration system という言葉は本来実数のデジタル化を意味するが，デジタル化にはコンパクト化が付随する．ここでは，結果としてのコンパクト化に焦点を当てる．このようなコンパクト化として，colored tiling spaceが考察される．この上のhomogeneous cocycleはフラクタル関数および決定的（すなわち，エントロピー０の）自己相似確率過程を与える．これらのスペクトルや数論的性質を調べることと，その応用が研究目的である．

３．研究の方法

一般に numeration system とは以下のような空間 Ω と定義する．ただし，G は R_+ の乗法に関する自明でない閉部分群とする．

(1) Ω は2点以上を含むcompact metrizable space であり，R が加法的に作用し，G が乗法的に作用している．$\omega \in \Omega$ への $t \in R$ の加法的作用，$\lambda \in G$ の乗法的作用は $\omega + t, \lambda\omega$ と記される．また，これらの作用は連続であり，分配則 $\lambda(\omega + t) = \lambda\omega + \lambda t$ が成立する．
(2) Ω への R の加法的作用はminimalで，かつuniquely ergodic である．この唯一の確率不変測度は平衡測度と呼ばれ m_Ω と記される．また，加法的作用の位相的エントロピーは 0 となる．
(3) Ω への $\lambda \in G$ の乗法的作用は位相的エントロピー $|\log\lambda|$ を持つ．さらに，m_Ω は乗法的作用に関しても不変で，かつ位相的エントロピーを達成する唯一の不変確率測度である．

numeration system Ω は，R 上でdigital表示を用いて与えられる連続関数を考える際の自然なコンパクト化であり，このような関数の Ω 上への拡張はコサイクルとして与えられる．コサイクル F とは $\Omega \times R$ から C への連続な写像で，任意の $\omega \in \Omega, s, t \in R$ に対して $F(\omega, t+s) = F(\omega, t) + F(\omega + t, s)$ を満たすものである．コサイクル F が α -同次 $(\alpha \in C)$ であるとは，任意の $\omega \in \Omega, t \in R$ および $\lambda \in G$ に対して $F(\lambda\omega, \lambda t) = \lambda^{\alpha} F(\omega, t)$ が成立することをいう．自明でない α -同次コサイクル $F(\omega, t)$ は ω を固定して見れば α 次のフラクタル関数となる（ただし，$0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1$）．さらに，$G = R_+$ となる Ω 上の α -同次コサイクル $F(\omega, t)$ は確率空間 (Ω, m_Ω) 上の α -self-similar process を与える．また，Ω の中の整数に制限した α -同次コサイクル（ただし，$\mathrm{Re}(\alpha) < 0$）はコバウンダリーとなり，これによる像はRauzy Fractalとよばれるフラクタル図形を与える．

空でない有限集合 A 上のweighted substitution (σ, τ) とは，A から $\cup_{n=2}^{\infty} A^n \times (0,1)^n$ への写像で $\sum_i \tau(a)_i = 1\ (\forall a \in A)$ を満たすものを意味する．ここで，σ は通常の意味で A 上のsubtitution となるが，primitiveであることを仮定する．また，τ はweightと呼ばれる．

上半平面 H の開長方形集合 $(x_1, x_2) \times (y_1, y_2)$ は $y_1 = x_2 - x_1$ を満たすときadmissible tileと呼ばれる．
admissible tileの全体を Ξ と記す．(σ, τ) に対応するcolored tiling space $\Omega(\sigma, \tau)$ とは，$\Xi \times A$ の部分集合 $\{(S_i, a_i); i \in I\}$ で $\{S_i; i \in I\}$ は H のtiling (partition)であり，tile 間のlocal connection rule が (σ, τ) で与えられるものの全体を意味する．a_i はtile S_i のcolorと呼ばれる．

$\omega \in \Omega(\sigma, \tau)$ に対して，colored tiling ω のすべてのtileを左に t 移動してできるcolored tilingを $\omega + t$，λ 倍してできる colored tilingを $\lambda\omega$ と定義すると，これらは $\Omega(\sigma, \tau)$ への加法的，乗法的作用となる．あらゆる有界領域でのcolored tiling間のHausdorff metricの収束を位相として $\Omega(\sigma, \tau)$ に導入する．また，$\sigma^n(a)_i = a$ となる $a \in A, n, i$ に対応するweight $\tau^n(a)_i$ の全体から生成される R_+ の閉部分群を (σ, τ) のbase setと呼び $B(\sigma, \tau)$ と記す．このとき，$\Omega(\sigma, \tau)$ は $G = B(\sigma, \tau)$ を満たすnumeration systemとなる．このような numeration systemを研究することで，一般化された自己アファイン関数の研究と応用を遂行した．

４．研究成果

本来の目的であるnumeration systemに関しては，weighted substitutionから定まるcolored tiling spaceにおいて加法演算がいつ強混合的か，いつ弱混合的かという問題を解決した．

<u>定理１</u>　強混合的であるための必要十分条件は，base setが R_+ となることとことである．また，このとき，加法演算はルベークスペクトルをもつ．さらに，弱混合的でないための必要十分条件はbase setがPisot数 $\lambda > 1$ を用い $\{\lambda^n; n \in Z\}$ と書けることである．

また，N-過程の性質とその応用面で成果があった．N-過程は特定のweighted substitutionから定まるcolored tiling space上の(1/2)-次同次コサイクルとして定義される確率過程で，(1/2)-次自己相似かつ無相関なものである．この意味でブラウン運動と類似しているが，ブラウン運動の場合エントロピーが ∞ であるのに反し，0となるものである．N-過程を基礎とした，確率過程で株価変動のモデルを作った．ここにおいては，近未来予測が時間差 Δt の誤差で行える．
ブラウン運動の場合は $\sqrt{\Delta t}$ となる．

さらに，派生した問題，合同な図形をいくつ

か重ね合わせるとき，これらが定める分割の個数をいかに大きくするかという問題が考察された．

可算無限集合Σ上への0または1の配置の全体は$\{0,1\}^{\Sigma}$と表される． $\{0,1\}^{\Sigma}$の空でない閉集合Ωの「大きさ」を測る最も素朴な量は複雑さ(complexity)，すなわち，$p_{\Omega}(S):=\#\pi_S\Omega$と定義される，$\Sigma$の有限部分集合$S$に依存する関数$p_{\Omega}(S)$である．ここで，＃は集合の元の個数，$\pi_S:\{0,1\}^{\Sigma}\to\{0,1\}^{S}$は射影（$\Sigma$上の配置の$S$上への制限）を表す．この量は詳細すぎるため一般には実用的でない．Sへの依存を減らすため，最大型複雑さ(maximal pattern complexity)，すなわち，$p^*_{\Omega}(k):=\sup_{\#S=k}p_{\Omega}(S)$と定義される$k=1,2,\ldots$の関数$p^*_{\Omega}(k)$が導入される．
Ωが一様集合(uniform set)であるとは，$p_{\Omega}(S)$が$\#S$のみの関数となることをいう．このとき，$\#S=k$となる任意のSを用いて，$p_{\Omega}(k)=p_{\Omega}(S)$と定義される$k=1,2,\ldots$の関数$p_{\Omega}(k)$を一様集合$\Omega$の一様複雑さ(uniform complexity)と呼ぶ．このとき，当然$p_{\Omega}(k)=p^*_{\Omega}(k)$が成立する．一様集合は以下に述べる最適位置または最適窓から自然に導入される．

位相空間X上の連続変換が作る作用群（または半群）GとXの部分集合Dを考える．このとき， $\{g^{-1}D;g\in G\}$に属す集合をk個重ね合わせて得られる空間Xの分割の個数を最大にすることを考える．この最大値を$p^*_{X,G,D}(k)$と記す．すなわち，
$p^*_{X,G,D}(k)=\sup_{S\subset G,\#S=k}\#\wp(\{g^{-1}D;g\in S\})$．
ここで，$\wp(B)$はXの部分集合族Bが定めるX上の分割を意味する．Gの可算無限集合Σが(X,G,D)に関して最適位置(optimal position)であるとは，任意のkと$\#S=k$を満たすΣの任意の部分集合Sが$\#\wp(\{g^{-1}D;g\in S\})=p^*_{X,G,D}(k)$を満たすことをいう．このとき，$x\in X$の元には$x\in\sigma^{-1}D$か否かによって$\omega(\sigma)=1$または0と定義することにより$\omega\in\{0,1\}^{\Sigma}$が定まる．これを$\Sigma$による$x\in X$の名と呼ぶ．このような名の全体の閉包$\Omega\subset\{0,1\}^{\Sigma}$は最適位置$\Sigma$の名集合と呼ばれ，一様集合となる．

すなわち，{0,1}の無限直積空間内の閉集合で，それを有限座標のみで見るとき，そのサイズは，座標の個数だけに依存する集合が一様集合である．このとき，このサイズを座標個数の関数と見て，一様複雑さと呼ぶ．その後の研究で，一様集合の構造，一様複雑さの特徴付けについて，以下の顕著な結果が得られた．

$N=\{0,1,2,\ldots\}$とする．空でない閉集合$\Omega\subset\{0,1\}^{N}$が超定常集合(super-stationary set)であるとは，Nの任意の無限部分集合$M=\{M_0<M_1<M_2<\ldots\}$に対して$\Omega[M]=\Omega$が成立することをいう．ここで，$\omega[M]\in\{0,1\}^{N}$を$\omega[M](n)=\omega(M_n)$と定義した上で$\Omega[M]:=\{\omega[M];\omega\in\Omega\}$と定義する．超定常集合は$T\Omega=\Omega[\{1,2,\ldots\}]=\Omega$なので定常である．

閉集合$\Omega\subset\{0,1\}^{\Sigma}$が与えられたとき，単射$\psi:N\to\Sigma$で$\Omega\circ\psi\subset\{0,1\}^{N}$が超定常集合となるものが存在するとき，$\Omega\circ\psi$の同型類$[\Omega\circ\psi]$を$\Omega$の素因子(primitive factor)と呼ぶ．ここで，２つの超定常集合が同型であるとは，等距離変換で互いに移り合うことをいう．すなわち，ΩとΛが同型であるとは，すべてのnに対して，$\omega(0)\omega(1)\ldots\omega(n)$と$f(\omega)(0)f(\omega)(1)\ldots f(\omega)(n)$がお互いを定めるような全単射$f:\Omega\to\Lambda$が存在することをいう．以下のことが知られている．

定理２　すべての一様集合は少なくとも一つの素因子をもつ．したがって，すべての一様複雑さは超定常集合によって実現される．

$\{0,1\}$の空列以外の有限列全体を$\{0,1\}^{+}$と記す．$\xi\in\{0,1\}^{+}$と$\omega\in\{0,1\}^{N}$に対して，Nの有限集合$S=\{s_1<s_2<\ldots<s_k\}$が存在し，$\xi=\omega(s_1)\omega(s_2)\ldots\omega(s_k)$となるとき$\xi<<\omega$と記す．また，$\xi<<\omega$を満たさない$\omega\in\{0,1\}^{N}$の全体を$\Im(\xi)$と記す． $\Omega=\{0,1\}^{N}$は超定常集合であるが，これ以外の超定常集合は以下のように特徴付けられる．

定理３　$\{0,1\}^{N}$以外の超定常集合の全体は，$\{0,1\}^{+}$の空でない有限部分集合Ξが存在して，$\cup_{\xi\in\Xi}\Im(\xi)$と書ける集合の全体と一致する．
また，$\{0,1\}^{N}$以外の超定常集合Ωの一様複雑さ$p_{\Omega}(k)$の値は，有限個のkを除いて，あるkの多項式で与えられる．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　8件）

‐T.Kamae, Rao Hui,Maximal pattern complexity over ℓ letters, European J. Combinatorics 27 (2006), pp.125-137

-T.Kamae, Hayato Takahashi, Statistical problems related to irrational rotations, Annals of the Institute of Statistical Mathematics vol. 58 (2006) pp.573-593

-T.Kamae, Rao Hui and Xue Yu-Mei Maximal pattern complexity for 2-dimensional words, Theoretical Computer Science 359 (2006), pp.15-27

-T.Kamae, Nertila Gjini, Tan Bo and Xue Yu-Mei) Maximal pattern complexity for Toeplitz words, Ergodic Theory and Dynamical Systems 26 (2006), pp. 1-14

- T.Kamae, Hui RAO, Bo TAN and Yu-Mei XUE) Language Structure of Pattern Sturmian Word, Discrete Mathematics, Discrete Mathematics 306 (2006), pp. 1651-1668

- T.Kamae, Uniform Sets and Complexity, Discrete Mathematics (DOI 10.1016/j.disc.2008.10.001)

-T.Kamae, Hui RAO, Bo TAN and Yu-Mei XUE) Super-stationary set, Subword problem and the Complexity, Discrete Mathematics (DOI 10.1016/j.disc.2009.02.001)

-T.Kamae, Mixing properties of the numeration systems coming from weighted substitutions, Ergodic Theory and Dynamical Systems (to appear)

〔学会発表〕(計　2件)

T.Kamae, Uniform complexity functions, First joint meeting of Chinese Mathematical Society and American Mathematical Society, 復旦大学(上海), December 2008

T.Kamae, Uniform sets and complexity, The 6th International conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, 東京工業大学, March 2009

〔図書〕(計　1件)

T.Kamae, Numeration systems as dynamical systems -Introduction, in Dynamics & Stochastics, Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes - Monograph Series vol. 48, Beechwood, Ohio, USA, 2006

〔産業財産権〕

○出願状況（計0件）

○取得状況（計0件）

〔その他〕

６．研究組織

(1)研究代表者　釜江哲朗

(2)研究分担者

(3)連携研究者